

11 классы

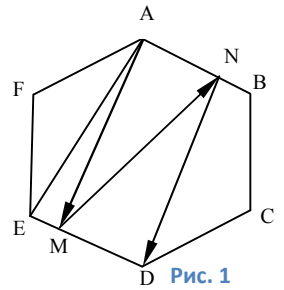
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, 2013$, чтобы сумма всех остальных чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

2. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{64}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{64}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{64}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{64}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{32}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{32}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin\left(\frac{31\pi}{32}\right)}.$$

3. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки A выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках M и N), попадает в точку D (рис. 1). Найдите тангенс угла EAM .

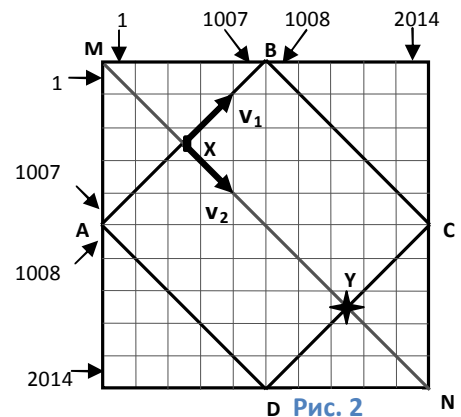


4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна 1, а предпоследняя равна 4. Найдите все такие двузначные числа.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , записано число $a_{i,j} = \log_2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}(i-j) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Найдите

сумму всех чисел в таблице.

6. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам. Диагональ одной клетки равна 1 см. Внутри квадрата расположен еще один квадрат $ABCD$, вершинами которого являются середины сторон исходного



квадрата (рис. 2). Из точки X одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 10 \text{ см/сек}$ по часовой стрелке по сторонам квадрата $ABCD$. Вторая точка начинает двигаться до точки N и далее курсирует по диагонали MN исходного квадрата со скоростью $v_2 = 13 \text{ см/сек}$. Через какое минимальное время они встретятся в точке Y ?

7. Известно, что четыре прямоугольника с общим прямым углом, изображенные на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры $n \times (n+2)$ клеток, где n –

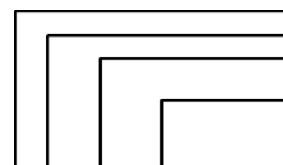


Рис. 3

- некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на **12**.
8. Несколько самосвалов, стоя в очереди, загружаются поочередно в пункте А (время загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт В, там они мгновенно разгружаются и возвращаются в А. Скорости машин одинаковы, скорость гружёной машины составляет $\frac{6}{7}$ скорости порожней. Первым выехал из А водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из А последним, и прибыл в А через **6** минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в пункт В и встретил Иванова второй раз через **40** минут после первой встречи. От места второй встречи до А Иванов ехал не менее **16** минут, но не более **19** минут. Определите время загрузки и количество загружавшихся самосвалов.