Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

Вариант 1

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f\big(f(m)\big)$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

2. Даны три числа a, b, c такие, что $a + b + c = 1$ и $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $a(a-1)^2 + $ $+ b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$.

3. Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

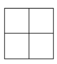
4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n > 2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right] \neq \left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

5. Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по правилу: $a_1 = r_n(0 + i_1), a_2 = r_n(1 + i_2), \ldots, a_n = r_n((n-1) + i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки $(i_1, i_2, i_3) =$ (1,2,0) получится набор $(a_1, a_2, a_3) =$ (1,0,2), т.к. $r_3(0+1) = 1, r_3(1+2) = 0, r_3(2+0) = 2$.)

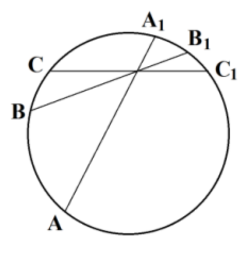
а) При $n = 9$ приведите пример такой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_9)$, что в соответствующем наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n = 10$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

6. Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую. После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.

 -1 тип  - 2 тип

7. Найдите значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$, если известно, что числа a, b, c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$



8. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.