Вариант 1

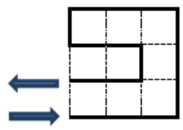
1. Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2016.

2. Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=41.$

3. Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон *a*, *b*, *c* и углами α, β, γ (α напротив стороны *a*, β – напротив *b*, γ – напротив *c*) выполняются равенства $a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma)=b^2+c^2-2bc\cos(60^0+\alpha)=a^2+c^2-2ab\cos(60^0+\beta).$

4. Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 45 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 100 сторон, а первая – по часовой стрелке через 83 стороны. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?

5. На плоскости изображён квадрат *n*x*n* клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении *n* и невозможно ни при каком чётном *n*.



6. Первый спортсмен начинает движение из пункта A в пункт B, держа в руке эстафетную палочку. Одновременно с ним из пункта B стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами A и B со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до A, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в B, оттуда снова в A и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает её другому спортсмену. Найти путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте B, если расстояние между пунктами A и B равно S.

7. Пусть *x* – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от *x* до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\|=0,3.$) Докажите, что найдётся натуральное число *k* такое, что 1) $k\le 999$ и 2) $\left\|k\cdot\sqrt{2}\right\|<\frac{1}{1000}.$

8. Найдите все пары натуральных чисел (*x*, *y*), удовлетворяющих равенству:

$$x^2+y^2=100000.$$