РЕШЕНИЯ
Х Х I МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

11 КЛАСС

1.Заметим, что если вторая (центральная) шестеренка повернута на x позиций по часовой стрелке относительно начального положения, то буква в окошке меняется на букву, отстоящую от нее на x позиций, но против часовой стрелки. При этом шестеренки с цифрами окажутся повернутыми **против часовой стрелки** на число позиций, равных $r_7(x)$ для первого колеса, и на $r_9(x)$ – для третьего, где $r_t(x)$ – остаток от деления x на t . При этом цифра в окошке будет меняться в сторону увеличения. Для быстрого нахождения величины x по известным значениям остатков используем приведенную следующую таблицу. Рассмотрим текст и найдем количество позиций, на которое повернулись шестеренки с цифрами при шифровании последующих букв. Например, первая пара цифр была 11, вторая – 64. Поэтому первая шестеренка сдвинулась на r_7 (6-1)=5 позиций, а вторая – на r_9 (4-1)=3 против часовой стрелки. В итоге получаем:

$r_9(x)$ \ $r_7(x)$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0		9		18		27
1	28	1		10		19	
2		29	2		11		20
3	21		30	3		12	
4		22		31	4		13
5	14		23			5	
6		15		24			6
7	7		16		25		
8		8		17		26	

11	64	12	46	66	75	56	65		29	42	71	12		23	67	76	28	52
Сдвиги первой шестеренки																		
	5	2	3	2	1	5	1		3	2	3	1		1	4	1	2	3
Сдвиги третьей шестеренки																		
	3	7	4	0	8	1	8		4	2	8	1		1	4	8	2	3

Количество позиций, на которое поворачивалась шестеренка с буквами, находится из таблицы: Первый поворот был осуществлен на 12 позиций по часовой стрелке, так как на пересечении столбца с номером 5 и строки с номером 3 стоит 12.

	12	16	31	9	8	19	8		31	2	17	1		1	4	8	2	3

Перебирая первую букву сообщения и находим вторую, зная которую, определяем третью и определяем весь текст.

Ответ: **М А Р С И А Н Е   Ж Д У Т   С Н Е Г А**

.

РЕШЕНИЯ
X X I Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

11 класс

2. Обозначим через $r_{257}\left(x\right)$ – остаток от деления на 257 числа x.

Так как

$$r_{257}\left(a^x\right)=16=r_{257}\left(16\right)=r_{257}\left(4^2\right)=$$
$$=r_{257}\left(\left(r_{257}\left(a^t\right)\right)^2\right)=r_{257}\left(a^{2t}\right),$$

где $1\le t\le 256$, $r_{257}\left(a^t\right)=4$.

Тогда $x=2t$ *или* $x=2t-256=2t'$.

Тогда

$$r_{257}\left(a^{xy}\right)=r_{257}\left(\left(248\right)^x\right)=r_{257}\left(r_{257}\left(-9\right)^x\right)=$$
$$=r_{257}\left(\left(-1\right)^{2t}9^x\right)=r_{257}\left(9^x\right).$$

С другой стороны

$$9=r_{257}\left(9\right)=r_{257}\left(3^2\right)=r_{257}\left(\left(r_{257}\left(a^s\right)\right)^2\right)=r_{257}\left(a^{2s}\right)$$

где $1\le s\le 256$, $r_{257}\left(a^s\right)=3$, s -нечетно.

$$r_{257}\left(9^x\right)=r_{257}\left(a^{2sx}\right)=r_{257}\left(\left(a^x\right)^{2s}\right)=r_{257}\left(256^s\right)=r_{257}\left(-1\right)$$

Тогда

$$r_{257}\left(a^{xy+1}\right)=r_{257}\left(-a\right)=252$$

Ответ: **252**

4. Составим таблицу, в которой каждый столбец сформирован из букв, находящихся на той же клавише, что и исходная:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
М	А	Ш	Е	Т	Т	У	З	П	О	Т	О	М	С	Е	Т	Ь	К	О	Т	Я	М	А	С	О	К	Д	В	О	Е
М	А	Ш	Д	Р	Р	Р	Д	М	М	Р	М	М	Р	Д	Р	Ь	И	М	Р	Ь	М	А	Р	М	И	Д	А	М	Д
Н	Б	Щ	Е	С	С	С	Е	Н	Н	С	Н	Н	С	Е	С	Э	Й	Н	С	Э	Н	Б	С	Н	Й	Е	Б	Н	Е
О	В	Ъ	Ж	Т	Т	Т	Ж	О	О	Т	О	О	Т	Ж	Т	Ю	К	О	Т	Ю	О	В	Т	О	К	Ж	В	О	Ж
П	Г	Ы	З	У	У	У	З	П	П	У	П	П	У	З	У	Я	Л	П	У	Я	П	Г	У	П	Л	З	Г	П	З

Подсчитав частоты встречаемости столбцов с буквами, находящимися на одной клавише, получаем, что самыми частыми будут столбцы с буквами **М,Н,О,П** и **Р,С,Т,У** (отмечены серым цветом). Поэтому, можно предположить, что буквы из парольного слова находятся среди выписанных выше букв и в некоторых местах текста являются пробелами (так сделаны все варианты). Далее, можно тогда предположить, что первый пробел стоит на 5-ой позиции (на первой позиции пробел стоять не может) и тогда читается слово **НАШЕ**, а первая буква секретного слова выбиралась из **Р,С,Т,У.** Начиная с 6-ой позиции читается слово **СУДНО**, тогда на 11-ой позиции опять стоит пробел. С учетом того, что по предположению третий пробел находится на месте расположения столбца с буквами **М,Н,О,П**, делаем предположение о его расположении на 22-ой позиции и читаем далее. Ключевым словом при этом может быть, например, слово **СУП**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
М	А	Ш	Е	Т	Т	У	З	П	О	Т	О	М	С	Е	Т	Ь	К	О	Т	Я	М	А	С	О	К	Д	В	О	Е
М	**А**	**Ш**	Д	Р	Р	Р	**Д**	М	М	Р	М	М	Р	Д	**Р**	Ь	И	М	Р	**Ь**	М	А	Р	М	И	Д	**А**	М	Д
Н	Б	Щ	**Е**	С	**С**	С	Е	**Н**	Н	С	Н	Н	С	**Е**	С	Э	Й	Н	**С**	Э	Н	Б	С	Н	Й	**Е**	Б	**Н**	**Е**
О	В	Ъ	Ж	Т	Т	Т	Ж	О	**О**	Т	О	**О**	**Т**	Ж	Т	Ю	К	**О**	Т	Ю	О	**В**	Т	**О**	**К**	Ж	В	О	Ж
П	Г	Ы	З	У	У	**У**	З	П	П	У	**П**	П	У	З	У	**Я**	**Л**	П	У	Я	П	Г	У	П	Л	З	Г	П	З

Ответ: **НАШЕ СУДНО ПОТЕРЯЛОСЬ В ОКЕАНЕ**

РЕШЕНИЯ
X X I Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

11 класс

5. Из формулировки задачи следует, что каждая буква пароля (кроме первой и последней) обрабатывается сначала функцией $g(y_1,y_2,y_3)=f(y_1,1-y_2,y_3)$, а затем - $f(y_1,y_2,y_3)$, то есть в условии задачи фактически даются значения функций g и f на одинаковых, но неизвестных наборах. Из свойств пороговых функций $f(y_1,y_2,y_3)$ и $g(y_1,y_2,y_3)=f(y_1,1-y_2,y_3)$ можно сформировать таблицу, в которую занесены возможные входные вектора-столбцы при условии, что на этих векторах известны соответствующие значения функций f и g. К тому же, если речь идет о входных векторах "нижнего" яруса, то есть о (x_4,x_5,x_6), (x_{10},x_{11},x_{12}), то из-за особенностей введенной кодировки получаем, что если $x_5=0$ $(x_{11}=0)$, то $x_6=1$ $(x_{12}=1)$ и наоборот. Таким образом, в этом случае в приведенной таблице единственным вариантом входного столбца будет только первый столбец из приведенных двух в соответствующей клетке. Поэтому, для каждой буквы пароля (кроме первой и последней) число вариантов для (y_1,y_2,y_3) будет два, а для (y_4,y_5,y_6) - один. Исходя из этого, составляем таблицу возможных входных векторов применительно к решаемой задаче:

$f=$ \ $g=$	**0**	**1**
0	0 0 1 ,0 0 0	1 0 1 ,1 0 1
1	0 1 0 ,0 1 0	1 1 0 ,1 1 1

	1-ая буква	2-ая буква		3-ая буква		4-ая буква		5-ая буква		6-ая буква		7-ая буква		8-ая буква		9-ая буква		10-я буква
y_1 y_2 y_3	f=0	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	f=1 g=1	1 1 0 1 1 1	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	f=0 g=0	0 0 1 0 0 0	f=0 g=1	0 1 0 0 1 0	g=0
y_4 y_5 y_6	f=1	f=0 g=0	0 1 0	f=0 g=0	0 1 0	f=0 g=0	0 1 0	f=0 g=0	0 1 0	f=0 g=0	0 1 0	f=0 g=1	0 0 1	f=1 g=0	1 1 0	f=0 g=0	0 1 0	g=1

В соответствии с приведенной кодировкой выпишем возможные варианты букв и находим пароль.

1-ая буква	2-ая буква	3-ая буква	4-ая буква	5-ая буква	6-ая буква	7-ая буква	8-ая буква	9-ая буква	10-я буква
?	Г	**Д**	Г	**Г**	Г	Ф	**К**	Г	**?**
	А	Ж	**А**	А	**А**	**С**	З	**А**	

Ответ: **МАДАГАСКАР**

3. Число $x_1x_4+x_4x_6+x_4=x_4(x_1+x_6+1)$ принимает нечетные значения, следовательно, $x_4=1$. Тогда (x_1+x_6+1) принимает нечетные значения при $x_1=x_6=1$ либо $x_1=x_6=0$. Рассмотрим две системы уравнений. Очевидно, задача равносильна системе уравнений в двоичной системе счисления (условие «четное» заменится на 0, а «нечетное» на 1).

1). $x_1=1$, $x_4=1$, $x_6=1$; получаем систему:

$x_2+x_2x_3+1=0$
$x_2+x_5+1=0$
$x_2+x_5+1=0$
$x_2+x_2x_3+1=0$
$x_2+x_3+1=0$

$x_2+x_2x_3+1=0$
$x_2+x_5+1=0$
$x_2+x_3+1=0$

$x_2=-x_3-1$
$-x_3(x_3+1)+1-x_3-1=0$
$-x_3+x_5=0$

$-x_3^2-2x_3=0$
$x_3=0$

$x_3=0$
$x_5=0$
$x_2=1$

2). $x_1=1$, $x_4=0$, $x_6=0$; получаем систему:
$x_2x_3=0$
$1=0$ => система не имеет решений

Ответ: **(1;1;0;1;0;1)**

6. Поместим точку C в начало декартовой системы координат, а точку B на ось абсцисс, как показано на рисунке. Тогда точки C, B, A будут иметь координаты $C(0,0), B(2,0), A(3/2, 3\sqrt{3}/2)$. Геометрическое место точек $K(x,y)$ таких, что $BK : CK = 2:3$ представляет собой окружность. Действительно,

$$\frac{BK^2}{CK^2} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{9},$$

что эквивалентно

$$\left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{144}{25}. \qquad (1)$$

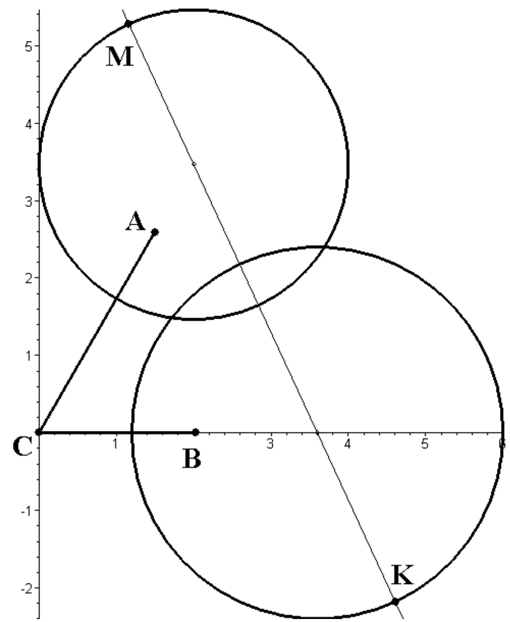
Аналогично, геометрическое место точек M таких, что $AM : MC = 1:2$ - окружность, заданная уравнением

$$(x-2)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 4. \qquad (2)$$

Чтобы расстояние между точками K (лежащей на окружности (1)) и M (на окружности (2)) было максимально, эти точки следует расположить на прямой, проходящей через центры окружностей. (Отметим, что жюри приняло решение не снижать оценку за задачу, если школьник этот факт использовал, но его доказательство не привел.)

Таким образом, искомое максимальное расстояние равно расстоянию между центрами окружностей (1), (2) плюс длины их радиусов:

$$MK_{\max} = 2 + \frac{12}{5} + \frac{2\sqrt{91}}{5} = \frac{22 + 2\sqrt{91}}{5}.$$



Ответ: $\frac{22 + 2\sqrt{91}}{5}$.