8-9 класс XXV МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

(сайт олимпиады www.cryptolymp.ru) 29.11.2015

1 вариант

1. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 30^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). Каким образом и за какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

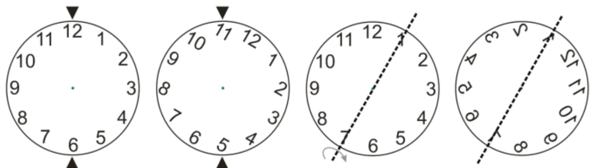


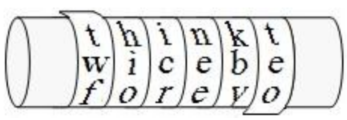
Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

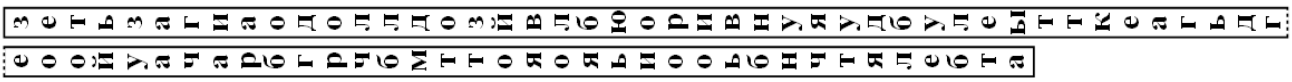
Решение: При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

Ответ: Такими поворотами открыть замок нельзя.

Замечание. *Здесь возможны и более "математизированные" рассуждения. Поворот диска вокруг стержня на* 180^0 *– это осевая симметрия диска относительно прямой, содержащей стержень. Будем эти осевые симметрии обозначать буквой S. В задаче требуется найти симметрии, композиция которых – поворот на* 30^0*. Композиция двух осевых симметрий* S_1 *и* S_2 *относительно прямых, угол между которыми* α, *– это поворот на угол* 2α*. Обозначая поворот буквой R, можем, таким образом, записать* $S_2 \circ S_1 = R_{2\alpha}$*. Композицией симметрии и поворота будет вновь симметрия* ($S \circ R = S$)*, а двух поворотов, очевидно, снова поворот* ($R \circ R = R$)*. Видим также, что симметрия меняет начертание цифр на "зеркальное" (см. переход от Рис.3 к Рис.4). Значит, чтобы диск оказался в положении, изображенном на Рис.2, симметрий должно быть четное число. Но каждая пара симметрий – это поворот, а композиция поворотов – это опять же поворот. Следовательно, композиция четного числа симметрий – поворот, причем на угол, кратный* 60^0 *(т.к. минимальный угол между прямыми –* 30^0*). Поэтому повернуть диск на* 30^0 *не получится.*

2. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение.

Решение: Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 81 буква. Значит стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размером $3\times 27, 27\times 3$ и 9×9. Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

з	о	в	у	т	е	б	я	н
е	д	л	я	т	о	г	о	ч
т	о	б	у	к	о	р	я	т
ь	л	ю	д	е	й	ч	ь	я
з	л	о	б	а	у	б	и	л
а	д	р	у	г	а	м	о	е
г	о	и	л	ь	ч	т	о	б
и	з	в	е	д	а	т	ь	т
а	й	н	ы	г	р	о	б	а

Ответ:

Зову тебя не для того,
Чтоб укорять людей, чья злоба
Убила друга моего,
Иль чтоб изведать тайны гроба,

3. Докажите, что для каждого натурального $n \geq 5$ квадрат можно разрезать на n прямоугольников (не обязательно одинаковых), у каждого из которых одна сторона вдвое больше другой. Резать разрешается по линиям, параллельным сторонам исходного квадрата.

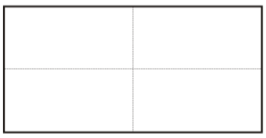


Рис.I

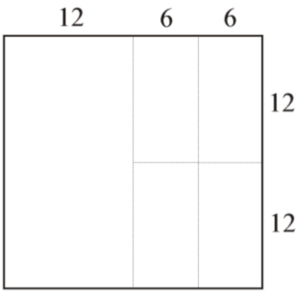


Рис.II. $n = 5$.

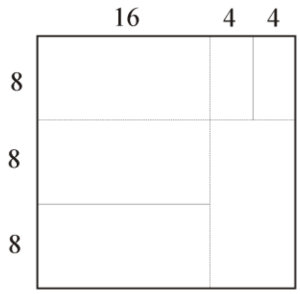


Рис.III. $n = 6$.

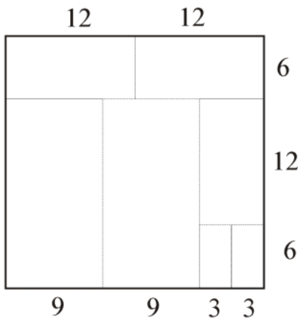


Рис.IV. $n = 7$.

Решение: Если квадрат уже разрезан на k прямоугольников с отношением сторон 2:1, то его можно разрезать и на k+3 таких прямоугольников. Действительно, для этого достаточно один из этих k прямоугольников, разрезать на четыре прямоугольника, у каждого из которых стороны также относятся как 2:1 (Рис.I). Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что квадрат можно разрезать на n=5,6 и 7 прямоугольников указанного вида. Соответствующие линия разреза приведены на Рис.II–IV. Для удобства сторона квадрата принята равной 24.

4. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots,$ которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 23, n = 1, 2, \ldots.$ Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что:

8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24, 29.

Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Решение: Обозначим через $r_{32}(a)$ остаток от деления числа a на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности $y_1, y_2, \ldots$:

$$y_2 = 4y_1 + 23,\ \ y_3 = 4\left(4y_1 + 23\right) + 23 = 16y_1 + 5\cdot 23,\ \ y_4 = 64y_1 + 21\cdot 23.$$

Далее $r_{32}(y_4)=r_{32}(21\cdot 23)=3$, а значит $r_{32}(y_5)=r_{32}\left(4y_4+23\right)=r_{32}\left(4\cdot 3+23\right)=3$. То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности $r_{32}(y_n)$ равны 3. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_{12}$ – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти x_4 надо решить уравнение $r_{32}(y_4x_4)=13$. Заметим, что $r_{32}(y_4x_4)=13 \Leftrightarrow r_{32}(3x_4)=13 \Leftrightarrow r_{32}(11\cdot 3x_4)=r_{32}(11\cdot 13) \Leftrightarrow r_{32}(x_4)=15 \Rightarrow x_4=15$. Следовательно, четвертая буква слова – П. Аналогично находятся числовые значения букв $x_5,\ldots,x_{12}$. В итоге, искомое слово принимает вид ***ПТОГРАФИЯ. Ответ легко угадывается.

Ответ: КРИПТОГРАФИЯ.

5. На столе выложены 11 карточек в порядке возрастания их номеров (Рис.а). Карточки разрешается перекладывать *тройками*, а именно: выбираем три любые карточки, например, с номерами 2, 3 и 5. Затем крайняя левая карточка перемещается на место средней, средняя на место крайней правой, а крайняя правая на место крайней левой. Результат изображен на Рис.б. Можно ли, перекладывая карточки указанным способом, уложить их как на Рис.а, но в порядке убывания номеров (карточка с номером 11 – первая, с номером 1 – последняя)?

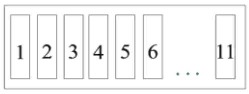


Рис. а

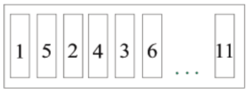


Рис. б

Решение: Пусть сейчас карточки выложены в каком-то порядке. Пару карточек будем называть *беспорядком*, если у левой карточка номер больше, чем у правой. Например, для пяти карточек 1,2,5,4,3 имеется три беспорядка: (5,4), (5,3), (4,3). В исходном расположении карточек на столе число беспорядков равно нулю. Перекладывая тройку карточек указанным в условии способом, мы число беспорядков изменяем на некоторое четное число. Значит количесво беспорядков всегда должно оставаться четным. Но, если карточки выложены в обратном порядке, то число беспорядков равно 10+9+…+1, то есть нечетно.

Ответ: Нельзя.

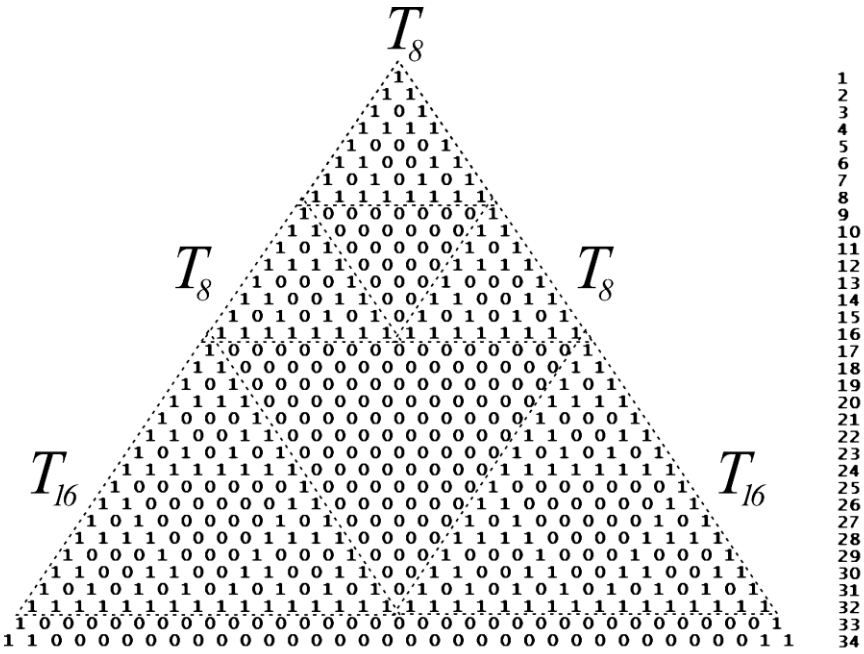
6. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится в строке с номером 100?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

Решение: Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц.

Понятно, что, после строки 64, идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 36 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 100 исходного (большого) треугольника, т.к. 100=64+36. Значит единиц в строке 100 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 36. В свою очередь единиц в строке 36 вдвое больше, чем в строке 4 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 32), то есть 8 штук. Значит в строке 100 их 16. Остальные 84 – нули.

Ответ: 84.



T_8
T_8
T_8
T_{16}
T_{16}