

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Порядок следования планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон. Поскольку фраза помогает расположить планеты запомнить, логично предположить, что первая буква в каждом слове – это первая буква в названии планеты. То есть М заменили на Ч, В на П и т.д. Из соображений читаемости легко восстанавливается ответ.

Ответ: МОЖНО ВЫЛЕТЕТЬ ЗА МАРС, ЮВЕЛИРНО СВЕРНУВ У НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ.

Задача 2

Число t у Марии равно $31 \cdot (4-1) + (28-1) = 89$, а у Александра $31 \cdot (1-1) + (31-1) = 30$. Пусть $n = 373$, тогда по условию $r_n(\alpha^{31}) = 89$, $r_n(\alpha^{12}) = 30$ (где $r_n(a)$ - остаток от деления числа a на n).

Требуется найти остаток от деления α^{189} на 373. Для этого найдем натуральные u и v такие, что $\alpha^{189} = (\alpha^{31})^u (\alpha^{12})^v$, то есть $31u + 12v = 189$. Тогда

$$v = \frac{189 - 31u}{12} = 15 - 3u + \frac{9 + 5u}{12}.$$

Чтобы числитель последней дроби делился на 12, следует положить $u = 3$, тогда $v = 8$ и (см. приложение):

$$r_n(\alpha^{189}) = r_n((\alpha^{31})^3 \cdot (\alpha^{12})^8) = r_n(\alpha^{31})^3 \cdot r_n(\alpha^{12})^8 = r_n(89)^3 \cdot r_n(30)^8 = 282.$$

Итак, число t у Павла равно 282, а т.к. $282 = 31 \cdot (10-1) + (4-1)$, то получаем, что Павел родился 4-го октября.

Ответ: 4-ое октября.

Задача 3

Для любых трех натуральных чисел m, n и a справедливо равенство $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$. Здесь (x, y) – наибольший общий делитель чисел x и y . В условии задачи показатели m и n взаимно просты, поэтому число $a^{(m,n)} - 1$ равняется числу $a - 1$, то есть длине искомого отрезку. Его можно получить по алгоритму Евклида: меньший отрезок откладывают циркулем на большем столько раз, сколько возможно; оставшуюся часть большего отрезка (принимаемую за «остаток от деления») откладывают на меньшем отрезке и т.д.

Покажем как можно решить задачу непосредственно (а по сути, перевести упомянутое равенство в частном случае). Даны два отрезка $x = a^{2015} - 1$ и $y = a^{2018} - 1$, где $a = 2016$. Будем, пока возможно, откладывать меньший отрезок x на большем y . То есть делим y на x с остатком: $a^{2018} - 1 = a^3(a^{2015} - 1) + a^3 - 1$. Теперь делим меньший отрезок x на остаток: $a^{2015} - 1 = a^2(a^{2013} - 1) + a^2 - 1$. Поскольку 2013 делится на 3, число $a^{2013} - 1$ делится нацело на число $a^3 - 1$, при этом $a^2 - 1$ – остаток от деления числа x на $a^3 - 1$. И, наконец, $a^3 - 1 = a(a^2 - 1) + a - 1$. Тем самым доказано, что наибольшей общей мерой данных в условии отрезков будет отрезок длиной $a - 1$.

Задача 4

Заметим, что “избавиться” от действия второго блока легко: достаточно от чисел зашифрованного сообщения взять остаток от деления на 33:

30 5 18 6 16 18 10 9 5 6 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 6 4 5 20 0 17 17 28 16 6 17 18 6 17
18 24 29 31 6 11 8 9 4 29 6 1 4 9 6 14 18 25 14 12 6 4 9 20 28

По регулярности расположения чисел и исходя из правила построения ключа обозначать знак пробела может только число 6 (которое встречается чаще всего):

30 5 18 - 16 18 10 9 5 - 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 - 4 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18
24 29 31 - 11 8 9 4 29 - 1 4 9 - 14 18 25 14 12 - 4 9 20 28

Рассмотрим возможные места расположения слова ЗДЕСЬ, в тексте всего имеется 5 вариантов слов из 5-ти букв:

16 18 10 9 5
4 5 20 0 17
17 18 24 29 31
11 8 9 4 29
14 18 25 14 12

Поскольку разные буквы шифровались разными числами, последний вариант расположения слова ЗДЕСЬ не подходит из-за дважды встречающегося числа 14. Учитывая алгоритм построения ключа, отбросим первый, второй и третий варианты, поскольку шестая буква алфавита Е при найденном расположении пробела не может оказаться на 18, 20 и 24 месте ключа.

Тогда единственным вариантом будет соответствие:
11 8 9 4 29 = ЗДЕСЬ.

Произведем замену:

30 5 18 - 16 18 10 9 5 - 19 18 14 0 3 0 5 Ь С 32 - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18
24 Ь 31 - 3 Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

Далее, поскольку Ь зашифрован числом 29, можно определить, что 30 31 32 = Э Ю Я, получаем:

Э 5 18 - 16 18 10 9 5 - 19 18 14 0 3 0 5 Ь С Я - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24
Ь Ю - 3 Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

По слову 1 С Е нетрудно догадаться, что 1 = В, слово Э 5 18 похоже на ЭТО и тогда 17 18 = НО, получаем:

Э Т О - 16 О 10 Е Т - 19 О 14 0 3 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н 17 28 16 - Н О - Н О 24 Ь
Ю - 3 Д Е С Ь - В С Е - 14 О 25 14 12 - С Е 20 28

Видим, что 24 = Ч, тогда 25 26 27 28 = Ш Щ Ъ Ы и 10 = Ж и располагаем почти читаемым текстом:

Э Т О - 16 О Ж Е Т - 19 О 14 0 3 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н Н Ы 16 - Н О - Н О Ч Ь Ю -
З Д Е С Ь - В С Е - 14 О Ш 14 12 - С Е 20 Ы,

который нетрудно восстановить по смыслу и с учетом правила зашифрования, описанного в задаче.

Ответ: ЭТО МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ СТРАННЫМ НО НОЧЬЮ ЗДЕСЬ ВСЕ КОШКИ СЕРЫ.

Задача 5

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, первые пять цифр можно выбрать $2 \cdot 10^4$ способами. Следующие четыре цифры (a_6, \dots выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_{10} . Таким образом, количество наборов из 10-и цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^8$. По аналогии, количество наборов (a_{11}, a_{12}, \dots сумма цифр у которых делится на 10, равно 10^9 .

Далее, пусть $A = (a_{11}, a_{12}, \dots)$ – один из таких наборов, т.е. сумма его цифр $M = a_{11} + a_{12} + \dots$ делится на 10. Используя цифры набора A , построим набор $B = ((9 - a_{11}), (9 - a_{12}), \dots)$. Сумма его цифр также делится на 10 и равна $90 - M$. Но тогда суммы цифр в наборах A и B имеют разные остатки от деления на 20 (у одной из них он 0, у другой – 10). Рассмотрим теперь какой-либо набор (a_1, \dots) удовлетворяющий условиям (1) и (2). Дополним его наборами A и B . Тогда сумма всех цифр ровно у одного из двух наборов (a_1, \dots) и (a_1, \dots) будет делиться нацело на 20. Значит, одному набору (a_1, \dots) "подойдет" ровно половина из 10^9 наборов (a_{11}, a_{12}, \dots) . Следовательно, общее количество наборов, удовлетворяющих условиям задачи, равно $2 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^9 = 10^{17}$.

Ответ: 10^{17} .

Задача 6

Если $s = u^3$, то по условию $r_n((s \cdot c)^d) = r_n(u \cdot m)$. При $s = 1728 = 12^3$ ошибки не было, поэтому $r_n(12 \cdot m)$ – четырехзначное число, начинающееся с 1, то есть

$$1000 \leq r_n(12 \cdot m) = 12 \cdot m - t \cdot n < 2000,$$

$$\frac{1000 + t \cdot n}{12} \leq m < \frac{2000 + t \cdot n}{12},$$

t – натуральное. С учетом того, что

$$1000 \leq m < 2000 \tag{1}$$

нетрудно заметить, что $t = 1$ и получаем следующее ограничение:

$$1767 \leq m \leq 1850. \tag{2}$$

При $s = 89^3$ ошибки также не было, поэтому

$$1000 \leq r_n(89 \cdot m) = 89 \cdot m - t' \cdot n < 2000,$$

$$\frac{1000 + t' \cdot n}{89} \leq m < \frac{2000 + t' \cdot n}{89}.$$

Нетрудно заметить, что $t' = 8$ – в этом можно убедиться непосредственной проверкой, но для сокращения времени на вычисления можно при различных t' получить только соответствующие оценки, противоречащие (1) или (2):

- при $t' = 10$ имеем $\frac{1000 + 10 \cdot n}{89} > \frac{10 \cdot 20203}{100} > 2000$, что противоречит (1);

- при $t' = 9$ имеем $\frac{1000 + 9 \cdot n}{89} > \frac{9 \cdot 20203}{90} > 2000$, что противоречит (1).

- при $t' = 7$ имеем $\frac{2000 + 7 \cdot 20203}{89} < \frac{2000 + 7 \cdot 20205}{85} = 25 + \frac{7}{17} \cdot 4021 < 1700$, что

противоречит (2).

В итоге получаем, что $t' = 8$ и

$$1828 \leq m \leq 1838. \tag{3}$$

Предположим теперь, что и при $s = 100^3$ ошибки не было. Тогда

$$a = \frac{1000 + t'' \cdot n}{100} \leq m < \frac{2000 + t'' \cdot n}{100} = b. \tag{4}$$

Полуинтервал $[a, b)$ должен иметь непустое пересечение с отрезком, определяемым неравенством (3). Следовательно,

$$\begin{cases} a \leq 1838 \\ b > 1828 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'' \cdot n \leq 182800 \\ t'' \cdot n > 180800 \end{cases} \Leftrightarrow t'' \cdot n = 181827.$$

Подставляя найденное значение $t'' \cdot n$ в (4), имеем

$$1829 \leq m \leq 1838. \quad (5)$$

Но на самом деле при $s = 100^3$ ошибка была, значит m неравенству (5) не удовлетворяет, но удовлетворяет неравенству (3), следовательно $m = 1828$.

Ответ: 1828.