10 класс XXIX МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
им. И.Я. ВЕРЧЕНКО ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ
(сайт олимпиады www.cryptolymp.ru) 24.11.2019

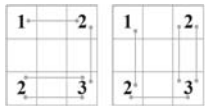
1 вариант

1. На билетах в кинотеатры Криптоландии проставляется шестизначный номер от (0,0,0,0,0,0) до (6,6,6,6,6,6). При этом используются только цифры 0,1,2,3,4,5,6. Билет считается «счастливым», если остатки от деления на 7 суммы первых трех цифр и суммы последних трех цифр отличаются на фиксированное число $k = 3$. Например, билеты с номерами 123226 и 111661 – счастливые, а с номерами 123000 и 666111 – нет. Найдите число счастливых билетов.

2. Известно, что p_1, p_2, p_3 – различные простые числа и $p_3^2 = p_1 \cdot p_2 + 4$. Найдите все такие числа p_1, p_2, p_3. Ответ обоснуйте.

3. Сообщение передается в виде таблицы 7×7 клеток. В каждой клетке записана либо буква, либо цифра. Чтобы прочитать сообщение, необходимо зачеркнуть отрезками лишние символы. Отрезки проводят по следующим правилам (см. примеры): 1) концы отрезков лежат только в клетках с цифрами, причем цифра показывает сколько концов в этой клетке лежит, 2) отрезки могут проходить только горизонтально или вертикально, 3) две цифры могут быть соединены не более, чем двумя отрезками. Прочитайте сообщение, которое получается выписыванием каждой третьей незачеркнутой буквы.

1	н	**2**	б	а	**1**	о
е	у	с	р	с	п	д
2	о	**6**	с	е	**3**	у
щ	е	е	т	т	д	н
а	м	**5**	к	в	ф	**2**
р	к	т	л	ц	а	л
1	и	**2**	к	**1**	м	**2**



4. Для зашифрования сообщении каждая его буква заменяется числом по таблице (внизу страницы). В результате получается числовая последовательность $x_1, \ldots, x_n$. Затем вырабатывают последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ по следующему правилу: γ_1 – некоторое натуральное число, γ_2 – сумма цифр квадрата γ_1, увеличенная на 1, и т.д. Например, если $\gamma_1 = 7$, то $\gamma_2 = 14$, $\gamma_3 = 17$ и т.д. После этого выбирается некоторое натуральное t и формируется зашифрованное сообщение по правилу: $r_{32}(x_1 + \gamma_t), \ldots, r_{32}(x_n + \gamma_{t+n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Известно, что для $\gamma_1 = 1407$ и некоторого t получился следующий шифртекст: 15, 11, 18, 7, 29, 13, 7, 25, 23, 20, 16, 18, 7, 9, 23, 25, 10. Восстановите исходное сообщение.

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по таблице (внизу страницы). Затем выбирают натуральные числа x_0 и k. Далее число x_0 приписывают в начало последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а число $x_{n+1} = x_0 + 3^n$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ (где $x_{n+1} = x_0 + 3^n$) затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ по формуле

$$y_i = r_{32}(x_i + 10x_i \cdot k + k), \quad i = 0,1, \ldots, n+1,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ заменяют буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЩВМЫЭДЫЭЪ**. Какое слово было зашифровано?

6. Каждому из четырех абонентов A_1, A_2, A_3, A_4 надо выдать по два уравнения вида $ax + by + cz = d$, где $a, b, c, d, x, y, z \in \{0,1\}$. Значения секретных битов w, x, y, z одинаковы для всех абонентов и им заранее неизвестны. Пусть, например, A_1 получит уравнения $\{x + y + z = 1, x + y + 0 \cdot z = 1\}$, а A_2 $-\{0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 1, 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0\}$. Здесь традиционно полагается, что $1 + 1 = 0$. Тогда, объединившись, из имеющихся в их распоряжении четырех уравнений они однозначно найдут, что $x = 0, y = 1, z = 0$. При этом будем говорить, что пара абонентов $\{A_1, A_2\}$ может *достоверно вычислить* секретные биты x, y, z. Приведите хотя бы один пример уравнений, которые надо выдать этим четырем абонентам, чтобы каждая пара $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}$ могла достоверно вычислить x, y, z, но чтобы при этом ни одна другая пара абонентов это сделать не смогла и ни один абонент в одиночку не смог бы найти даже один секретный бит.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31