

### Решение, 9 класс.

1. К пристани на озере приближаются две одинаковые лодки. Оба лодочника подтягиваются с помощью веревки. Противоположный конец веревки первой лодки привязан к тумбе на пристани; противоположный же конец веревки второй лодки находится в руках матроса на пристани, который тоже тянет веревку к себе. Все трое прилагают одинаковые усилия. Какая лодка причалит раньше и почему?

*Решение.*

На первую и вторую лодки действует одинаковая сила натяжения веревки, следовательно, согласно второму закону Ньютона, они приобретут одинаковое ускорение и причалят к пристани одновременно.

2. С ледяной дорожки, наклон которой 30 градусов, а длина 12 м, скатываются сани и мчатся далее по горизонтальной поверхности. На каком расстоянии они остановятся? Коэффициент трения  $\mu=0.02$ .

*Решение.*

Запишем закон сохранения энергии:

$$E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{тр}}$$

Раскроем его:

$$0 - mgl\sin\alpha = A_{\text{тр}1} + A_{\text{тр}2}$$

где  $A_{\text{тр}1} = (\mu mg \cos\alpha)l \cos 180^\circ$  – работа силы трения на наклонной плоскости;

$A_{\text{тр}2} = (\mu mg)L \cos 180^\circ$  – работа силы трения на горизонтальной поверхности, а  $L$  – искомое расстояние, которое проедут санки до остановки.

Подставим:

$$\begin{aligned} mgl\sin\alpha &= \mu mgl\cos\alpha + \mu mgL \\ L &= \frac{l(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)}{\mu} = 290 \text{ м.} \end{aligned}$$

3. К одному концу резинового шнура прикрепили шарик массой 50 г, другой его конец закрепили на горизонтальной гладкой поверхности и привели шарик во вращение по поверхности с угловой скоростью 20 рад/с. Найдите удлинение шнура (в см), если его жесткость 100 Н/м, первоначальная длина 40 см.

*Решение.*

Запишем вотой закон Ньютона в проекции на мгновенную ось, проходящую через шарик и направленную к центру окружности:

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}} &= ma \\ kx &= m\omega^2(1+x) \\ x &= \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2} = 10 \text{ см.} \end{aligned}$$

4. К малому поршню гидравлического пресса приложена сила 10 Н, под действием которой за один ход он опускается на 25 см, вследствие чего большой поршень поднимается на 5 мм. Какая сила давления передается при этом на большой поршень?

*Решение.*

Если пренебречь гидростатическим давлением то давление жидкости под малым и большим поршнями одинаково:

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Так как жидкость несжимаема, то уменьшение объема жидкости под малым поршнем равно увеличению объема жидкости под большим поршнем:

$$V_1 = V_2$$
$$h_1 S_1 = h_2 S_2$$
$$S_2 = \frac{h_1 S_1}{h_2}$$
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2 h_2}{h_1 S_1}$$

$$F_2 = F_1 \frac{h_1}{h_2} = 500 \text{ Н.}$$

5. В проводнике с сопротивлением 10 Ом, включенном в сеть постоянного напряжения, за 5 с выделилась энергия 450 Дж. Каково напряжение в сети?

*Решение.*

Воспользуемся законом Джоуля-Ленца:

$$Q = \frac{U^2}{R} t$$
$$U = \sqrt{\frac{QR}{t}} = 30 \text{ В.}$$

6. Сколько полных колебаний совершит материальная точка за 5 секунд, если частота колебаний 440 Гц?

*Решение.*

Частота  $\nu$  – это по определению количество колебаний, которое совершает тело за единицу времени, т.е. за одну секунду, следовательно за 5 секунд колебаний будет совершено в 5 раз больше.

$$N = \nu t = 2200.$$

### Решение, 10 класс.

Задача 1. Зенитчики стреляют по вражескому самолёту в тот момент, когда он пролетает точно над ними на высоте 2,5 км со скоростью 720 км/ч. Какой должна быть минимальная скорость вылета снаряда, чтобы можно было поразить самолёт? Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ , сопротивлением воздуха пренебречь.

#### Решение.

Горизонтальная составляющая скорости снаряда должна, очевидно, равняться скорости самолета  $720 \text{ км/ч} = 200 \text{ м/с}$ . Вертикальная составляющая определяется необходимостью достижения высоты, на которой летит самолет, т.е.  $V_{\text{верт.}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{50000} \text{ м/с}$ . Величину минимальной начальной скорости находим с помощью теоремы Пифагора  $V_0 = \sqrt{V_c^2 + V_{\text{верт.}}^2} = 300 \text{ м/с}$ .

Задача 2. В углу комнаты на идеально гладком полу лежит клин треугольного сечения исчезающе малой массы. По нему без трения скользит брусок массой 200 г. При этом сила давления клина на вертикальную стенку равна 0,5 Н. Чему равен угол наклона поверхности клина к горизонту? Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

#### Решение.

Сила давления бруска на клин  $N_1 = mg \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – искомый угол наклона. Сила давления со стороны вертикальной стенки должна компенсировать горизонтальную составляющую  $N_1$ . Соответственно,  $N_2 = N_1 \tan \alpha = N_1 \sin \alpha / \cos \alpha = \frac{1}{2} mg \sin 2\alpha$ . Подставляя числовые значения, находим  $\alpha = 15^\circ$ .

Задача 3. На гладкой горизонтальной поверхности вращаются с угловой скоростью  $\omega$  две маленькие шайбы, связанные невесомой нитью длиной  $l$ . Масса одной из шайб  $m_1$ , сила натяжения нити  $T$ . Найдите массу второй шайбы.

#### Решение.

Шайбы вращаются вокруг точки С (центр масс) по окружностям радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , которые определяются из условий:  $R_1 + R_2 = l$ ;  $m_1 a_1 = m_2 a_2 = T$  (второй и третий законы Ньютона). Записывая ускорения  $a_1 = \omega^2 R_1$  и  $a_2 = \omega^2 R_2$ , приходим к уравнению  $m_1 R_1 = m_2 R_2$  (правило рычага). Решая полученную систему уравнений, находим  $R_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$  и  $R_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$ , что позволяет записать второй закон Ньютона в виде  $\frac{m_1 m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2} = T$ , откуда определяем  $m_2 = \frac{m_1 T}{m_1 \omega^2 l - T}$ .

R1CR2



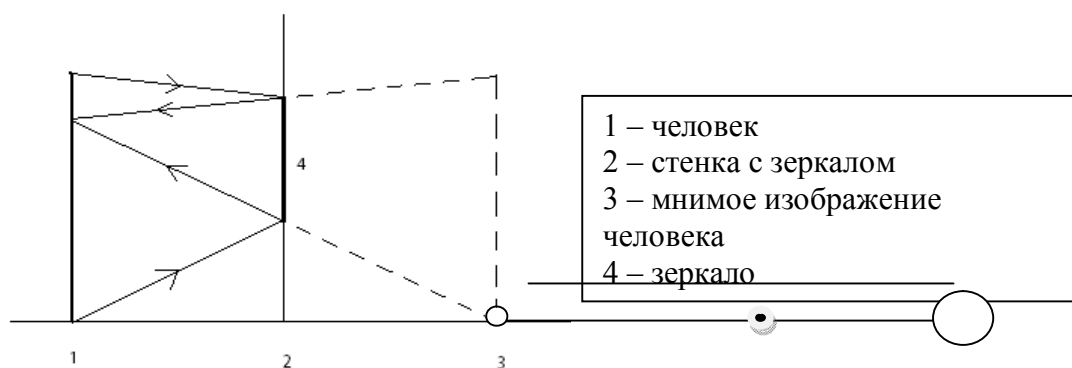
Задача 4. Большая бочка цилиндрической формы доверху наполнена водой. Чтобы вычерпать половину воды необходимо совершить работу  $A$ . Какую работу придётся совершить чтобы опустошить всю бочку?

**Решение.**

Совершаемая работа идет на увеличение потенциальной энергии жидкости, т.к. воду приходится поднимать в поле тяжести. Эта работа квадратично зависит от высоты бочки, потому что и масса воды пропорциональна этой высоте. Следовательно, чтобы вычерпать воду из всей бочки, нужно совершить работу  $4A$ .

Задача 5. Ваш рост равен 1 м 70 см. Какую минимальную высоту должно иметь зеркало, висящее на стене, чтобы Вы могли видеть себя в нём во весь рост?

**Решение.**



Из подобия треугольников легко получается ответ: минимальная высота зеркала равна половине роста человека, т.е.  $0,85\text{м}=85\text{см}$

Задача 6. При подключении к источнику тока некоторого резистора с сопротивлением существенно превышающим внутреннее сопротивление источника на нём выделяется тепловая мощность 100 Вт. Какая мощность

будет выделяться на каждом из двух таких резисторов, если их соединить последовательно и подключить к тому же источнику?

**Решение.**

При последовательном соединении двух одинаковых резисторов напряжение на каждом из них будет равно половине общего. Т.к. мощность, выделяемая на резисторе квадратично зависит от напряжения, то мощность, которая будет выделяться на каждом из двух резисторов, соединенных последовательно, окажется равной  $\frac{1}{4}100\text{Вт} = 25\text{Вт}$ .

## Решение, 11 класс.

### Задача 1 (Динамика-гравитация)

Известно, что при подъеме тела с поверхности Земли сила  $F$  его притяжения к Земле уменьшается. А как изменяется эта сила при погружении тела в шахту, доходящую до центра Земли? Постройте график зависимости силы  $F$  от расстояния  $r$  между телом и центром Земли. Масса тела равна  $m$ . Считать Землю однородным шаром радиусом  $R_3$ , массой  $M_3$ . Гравитационная постоянная  $G$ .

Ответ:  $F=GM_3m/r^2$  при  $r \geq R_3$ ,  $F=GM_3mr/R_3^3$  при  $r < R_3$ .

#### Решение

При  $r > R_3$ , где  $R_3$  — радиус Земли, сила  $F$  равна:

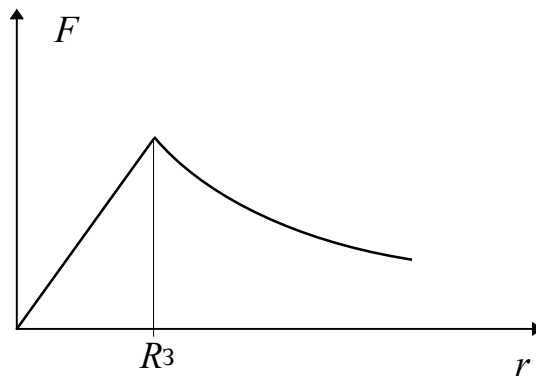
$$F=GM_3m/r^2.$$

При погружении тела в шахту действующая на тело гравитационная сила зависит только от массы части земного шара радиусом  $r$ , равным расстоянию от тела до центра Земли:

$$F=G((M_3/(4\pi R_3^3/3))(4\pi r^3/3)m/r^2)=GM_3mr/R_3^3,$$

где  $M_3$  — масса Земли,  $R_3$  — радиус Земли,  $M_3/(4\pi R_3^3/3)$  — плотность вещества Земли,  $4\pi r^3/3$  — объем части земного шара радиусом  $r$ , равным расстоянию от тела до центра Земли.

График искомой зависимости имеет вид:



К решению задачи 1

### Задача 2 (прямолинейное равноускоренное движение)

Уклон длиной  $S=100$  м лыжник прошел за  $t_0=20$  с, двигаясь с ускорением  $a=0,3$  м/с<sup>2</sup>. Какова скорость лыжника в конце уклона  $V_k$ ?

Ответ:  $V_k=(2S+at_0^2)/(2t_0)=8$  м/с.

#### Решение

Из формулы пути при равноускоренном движении:

$$S = V_0 t + at_0^2 / 2$$

найдем начальную скорость  $V_0$ :

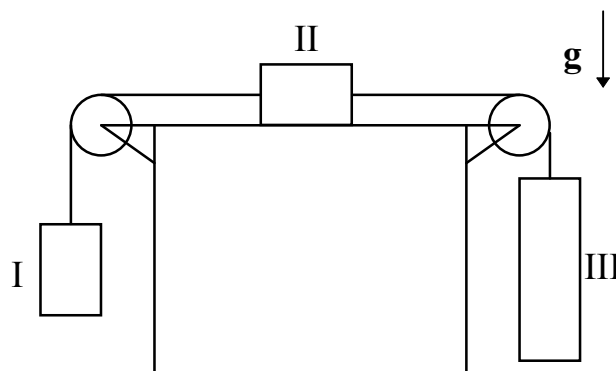
$$V_0 = (2S - at_0^2) / (2t_0).$$

Из формулы скорости при равноускоренном движении найдем конечную скорость лыжника:

$$V_k = V_0 + at_0 = (2S + at_0^2) / (2t_0) = 8 \text{ м/с.}$$

### Задача 3 (Динамика прямолинейного движения, сила трения)

Система из трех тел I, II и III, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями, движется с постоянным ускорением (см. рис.). Нити перекинуты через гладкие невесомые блоки. Среднее тело перемещается по шероховатой горизонтальной поверхности неподвижной подставки, коэффициент трения между телом и подставкой равен  $\mu = 0,2$ . Массы тел I и II одинаковы и равны  $m$ , масса тела III равна  $2m$ , величина  $m$  равна 1 кг. Какова сила натяжения нити  $F_2$ , связывающей тела II и III? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



К задаче 3

Ответ:  $F_2 = (3 + \mu)mg / 2 = 16 \text{ Н.}$

#### Решение

Уравнения движения I, II и III тел соответственно имеют следующий вид:

$$ma = F_1 - mg,$$

$$ma = F_1 - F_2 - \mu mg,$$

$$2ma = 2mg - F_2.$$

Здесь  $a$  — ускорение тел,  $\mu mg$  — действующая на тело II сила трения скольжения,  $F_2$  — сила натяжения нити, связывающей тела II и III. Решив систему относительно трех неизвестных величин  $a$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , получим:

$$a = (1 - \mu)g / 4 = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$F_1 = (5 - \mu)mg / 4 = 12 \text{ Н,}$$

$$F_2 = (3 + \mu)mg / 2 = 16 \text{ Н.}$$

#### Задача 4 (Колебания — ЗСЭ)

На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой  $f=1000$  Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту  $H=5$  мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найти амплитуду колебаний пластины  $A$ . Ускорение свободного падения  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>.

$$\text{Ответ: } A = \sqrt{2gH / (2\pi f)^2 - g^2 / (2\pi f)^4} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

#### Решение

Направим координатную ось  $x$  вертикально вверх и положим  $x=0$  в среднем положении пластины.

Зависимость вертикальной координаты пластины от времени описывается законом:

$$x = A \sin(\omega t),$$

где  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота колебаний.

Зависимость проекции скорости пластины на ось  $x$  от времени описывается выражением:

$$V_x = A\omega \cos \omega t.$$

Зависимость проекции ускорения пластины на ось  $x$  от времени описывается выражением:

$$a_x = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Песчинки отрываются от пластины и подпрыгивают при движении пластины снизу вверх. Обозначим координату пластины в момент отрыва песчинки через  $h$ .

В момент отрыва от пластины песчинки сила, с которой песчинка давит на пластину, становится равной нулю. Поэтому ускорение песчинки в этот момент равно ускорению свободного падения  $g$ :

$$a_x = -A\omega^2 \sin \omega t_0 = -g. \quad (1)$$

Уравнение (1) определяет момент  $t_0$  отрыва песчинки от пластины. Из него удобно выразить величину  $\sin \omega t_0$ :

$$\sin \omega t_0 = g / (A\omega^2).$$

Координата пластины и песчинки в момент ее отрыва равна (с учетом полученного выражения для  $\sin \omega t_0$ ):

$$h = A \sin \omega t_0 = g / \omega^2.$$

Скорость пластины и песчинки в момент ее отрыва, которую обозначим через  $V_{x0}$ , равна:

$$V_{x0} = A\omega \cos \omega t_0.$$

Запишем закон сохранения энергии песчинки для моментов ее отрыва и пребывания в высшей точке траектории на высоте  $H$  ( $m$  — масса песчинки):



$$mgh + mV_{x0}^2/2 = mgH. \quad (2)$$

Преобразуем это уравнение с учетом ранее полученных выражений для  $h$  и  $V_{x0}$ :

$$\begin{aligned} g/\omega^2 + A^2\omega^2 \cos^2 \omega t_0 / (2g) &= H, \\ g/\omega^2 + A^2\omega^2 (1 - \sin^2 \omega t_0) / (2g) &= H, \\ g/\omega^2 + A^2\omega^2 (1 - g^2 / (A^2\omega^4)) / (2g) &= H, \\ g / (2\omega^2) + A^2\omega^2 / (2g) &= H. \end{aligned}$$

Отсюда найдем искомую амплитуду колебаний пластины  $A$ :

$$A = \sqrt{2gH / \omega^2 - g^2 / \omega^4} = \sqrt{2gH / (2\pi f)^2 - g^2 / (2\pi f)^4} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

$$\text{Итак, } A = \sqrt{2gH / (2\pi f)^2 - g^2 / (2\pi f)^4} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$A = \sqrt{2gH / (2\pi f)^2 - g^2 / (2\pi f)^4} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

### Задача 5 (законы идеального газа)

Какое давление рабочей смеси  $P_2$  устанавливается в цилиндрах двигателя автомобиля ЗИЛ, если в такте сжатия температура повышается с  $t_1=50^\circ\text{C}$  до  $t_2=250^\circ\text{C}$ , а объем уменьшается с  $V_1=0,75$  л до  $V_2=0,12$  л? Первоначальное давление равно  $P_1=80$  кПа.

Ответ:  $P_2 = P_1 V_1 T_2 / (T_1 V_2) \approx 810$  кПа, где  $T_1 = t_1 + 273,15$  и  $T_2 = t_2 + 273,15$  — значения абсолютной температуры смеси, К.

Решение

Параметры газа в начале и конце такта сжатия свяжем, используя объединенный газовый закон:

$$P_1 V_1 / T_1 = P_2 V_2 / T_2,$$

где  $T_1 = t_1 + 273,15$  и  $T_2 = t_2 + 273,15$  — значения абсолютной температуры смеси, К.

Отсюда искомое давление  $P_2$  равно:

$$P_2 = P_1 V_1 T_2 / (T_1 V_2) \approx 810 \text{ кПа.}$$

### Задача 6 (законы постоянного тока)

Определить напряжение  $U_{a\bar{b}}$  между точками  $a$  и  $\bar{b}$  электрической цепи, изображенной на рисунке. Показание вольтметра  $U=250$  В. Сопротивления всех резисторов и сопротивление вольтметра одинаковы и равны  $R=R_V=1000$  Ом, сопротивление амперметра  $R_A=250$  Ом.

Ответ:  $U_{a\bar{b}} = U \left( 3 + 4 \frac{R_A}{R} \right) = 1000$  В.

Решение

Ток через вольтметр равен:

$$I_V = \frac{U}{R_V} = \frac{U}{R}.$$

Напряжение на сопротивлении  $R_2$ :

$$U_{R_2} = I_V R = 3U.$$

Ток через сопротивление  $R_2$ :

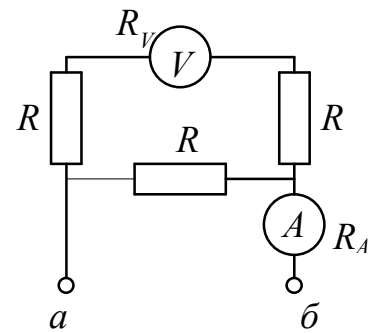
$$I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{3U}{R}.$$

Ток  $I_A$  через амперметр равен:

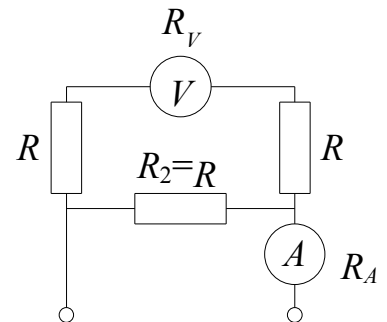
$$I_A = I_V + I_{R_2} = \frac{U}{R} + \frac{3U}{R} = \frac{4U}{R} = 1 \text{ А}.$$

Напряжение между точками  $a$  и  $\bar{b}$ :

$$U_{a\bar{b}} = U_{R_2} + I_A R_A = 3U + \frac{4U}{R} R_A = U \left( 3 + 4 \frac{R_A}{R} \right) = 1000 \text{ В}.$$



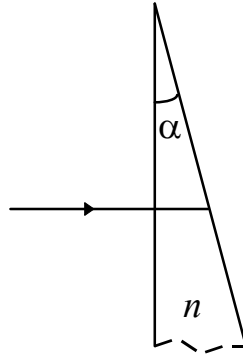
К задаче 3



К задаче 3

### Задача 7 (оптика-закон преломления)

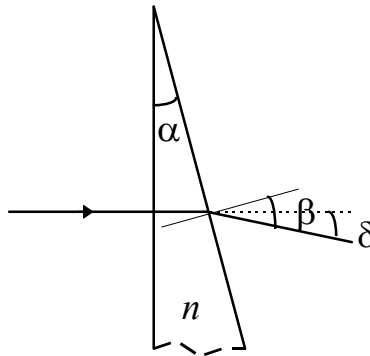
Луч света падает из воздуха нормально на боковую грань стеклянной призмы с преломляющим углом  $\alpha=20^\circ$  (см. рис.). На сколько градусов  $\delta$  отклонится луч от своего первоначального направления при выходе из призмы, если он внутри призмы падает на вторую боковую грань? Абсолютный показатель преломления стекла  $n=1,6$ .



К задаче 7

Ответ:  $\delta = \arcsin(n \sin \alpha) - \alpha \approx 13^\circ$ .

Решение.



К решению задачи 7

Угол падения луча на вторую боковую грань внутри призмы равен преломляющему углу призмы  $\alpha$ . Поэтому закон преломления луча на второй боковой грани имеет вид:

$$n \sin \alpha = \sin \beta,$$

где  $\beta$  — угол преломления.

Искомый угол отклонения  $\delta$  равен (см. рисунок к решению задачи):

$$\delta = \beta - \alpha = \arcsin(n \sin \alpha) - \alpha \approx 13^\circ.$$

### Задача 8 (Закон Ампера)

Тонкий стержень длиной  $L=70$  см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, равна  $L_1=30$  см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B=4$  мТл. Найти величину результирующей силы Ампера  $F$ , действующей на стержень, если по нему пропускать ток  $I=10$  А.

Ответ:  $F = IB \sqrt{L_1^2 + (L - L_1)^2} = 2 \cdot 10^{-2}$  Н.

Решение.

Обозначим через  $L_2$  длину второй стороны угла, образованного двумя частями стержня ( $L_2=L-L_1=40$  см). На две части стержня действуют силы

Ампера  $F_1=IL_1B$  и  $F_2=IL_2B=I(L-L_1)B$ , перпендикулярные друг к другу (см. рис.). Суммарная сила Ампера равна:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = IB\sqrt{L_1^2 + L_2^2} = IB\sqrt{L_1^2 + (L - L_1)^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

