

Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2019-2020 учебном году
10 класс

Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). В закрытом с обоих концов теплоизолированном горизонтально расположенном цилиндре есть тонкий теплопроводящий невесомый поршень, делящий цилиндр на две части, и могущий двигаться без трения. В одной части цилиндра находится молекулярный водород массы $m_B = 3$ г. В другой части цилиндра находится молекулярный кислород массы $m_K = 16$ г. Найти отношение объемов η ($\eta = V_B/V_K$), занимаемых газами. Молекулярные массы газов: $\mu_B = 2$ г/моль, $\mu_K = 32$ г/моль.

Решение:

Запишем уравнение состояния каждого газа в своей части цилиндра.

$$PV_B = \nu_B RT = \frac{m_B}{\mu_B} RT.$$

$$PV_K = \nu_K RT = \frac{m_K}{\mu_K} RT.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим, что искомое нами отношение определяется отношением числа молей данных газов.

Ответ: $\eta = \frac{V_B}{V_K} = \frac{\nu_B}{\nu_K} = \frac{m_B \mu_K}{\mu_B m_K} = 3.$

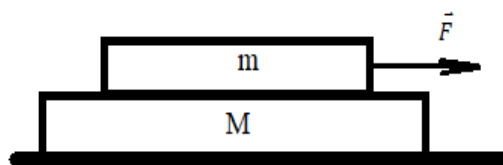
Задача 2. (20 баллов). Стальной шарик массы m подвешен к потолку на легкой пружине жесткости k . Его первоначально удерживают так, что пружина не растянута, а затем отпускают. Найдите среднюю скорость шарика при движении до остановки. Ускорение свободного падения g .

Решение:

После того как шарик отпустят, он будет совершать колебания в вертикальном направлении с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ относительно положения равновесия, которое находим из условия $mg = kl$, где l – удлинение пружины при равновесии. Средняя скорость будет равна перемещению груза до нижней точки $2l$, деленному на половину периода.

Ответ: $V_{\text{ср}} = \frac{2g}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 3. (20 баллов). На горизонтальной поверхности стола покоится доска массы M . На горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массы m . Коэффициент трения скольжения между досками равен μ . Коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен нулю. К верхней доске приложили горизонтальную силу F (см. рис). Найти ускорения a_n и a_b нижней и верхней досок и силу трения $F_{\text{тр.}}$, возникающую между досками.



Решение:

Проанализируем все возможные случаи.

1. Приложенная к верхней доске сила равна нулю ($F=0$). Тогда:

$$a_n = a_b = 0.$$

Сила трения (сила трения покоя) тоже равна нулю

$$(F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = 0).$$

2. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю ($F \neq 0$) и тела движутся как единое целое.

В этом случае ускорения тел легко вычисляются и равны:

$$a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = \frac{F}{M + m}.$$

Поскольку нижняя доска движется с только что найденным ускорением $a_{\text{н}}$ благодаря лишь силе трения (силе трения покоя, т.к. доски не движутся друг относительно друга), находим:

$$F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = \frac{MF}{m+M}.$$

Однако, величина силы трения покоя всегда ограничена сверху величиной силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр.пок.}} \leq F_{\text{тр.ск.}}$$

Подставляем в последнее неравенство выражения для соответствующих сил, найдем предельную силу F , при которой доски еще могут двигаться как единое целое:

$$\frac{MF}{m + M} \leq mg\mu,$$

или

$$F \leq \frac{mg\mu}{M} (M + m) = mg\mu \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Если внешняя сила F будет удовлетворять неравенству

$$F > mg\mu \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

доски будут двигаться не как единое целое (одна относительно другой).

3. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю ($F \neq 0$) но тела движутся не как единое целое. Напишем уравнения движения для каждой из досок:

$$ma_{\text{в}} = F - mg\mu,$$

$$Ma_{\text{н}} = mg\mu,$$

где $F_{\text{тр.ск.}} = mg\mu$. – сила трения скольжения.

Запишем решения этих уравнений:

$$a_{\text{н}} = \frac{mg\mu}{M},$$

$$a_{\text{в}} = \frac{F - mg\mu}{m}, F \geq mg\mu.$$

Неравенство $F \geq mg\mu$ – это требование того, чтобы величина $a_{\text{в}}$ была неотрицательна.

Не трудно доказать, что неравенство $F \geq mg\mu$ заведомо выполнимо, т.к. выполняется неравенство

$$F > mg\mu \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Ответ:

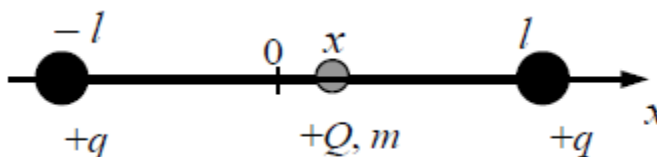
1. $a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = 0, F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = 0$, если $F=0$. Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.

2. $a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = \frac{F}{M+m} \cdot F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = \frac{MF}{m+M}$, если $0 \leq F \leq mg\mu \left(1 + \frac{m}{M}\right)$. Доски покоятся друг относительно друга, но как единое целое движутся относительно стола.

3. $a_{\text{н}} = \frac{mg\mu}{M}$, $a_{\text{в}} = \frac{F-mg\mu}{m}$, $F_{\text{тр.ск.}} = mg\mu$, если $F > mg\mu \left(1 + \frac{m}{M}\right)$. Доски движутся и относительно друг друга, и относительно стола.

Задача 4. (20 баллов). Бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$. На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$ (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T . Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.

Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{kQq}{(l+x)^2} - \frac{kQq}{(l-x)^2} = kQq \frac{(l-x)^2 - (l+x)^2}{(l+x)^2 (l-x)^2} = \\
 &= -4lkQq \frac{x}{(l+x)^2 (l-x)^2} = -4lkQq \frac{x}{[(l+x)(l-x)]^2} = \\
 &= -4lkQq \frac{x}{(l^2 - x^2)^2} = -4lkQq \frac{x}{l^4 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Так как $|x| \ll l$, то $\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1$, поэтому $F = -4lkQq \frac{x}{l^4} = -\frac{4kQq}{l^3} x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x . Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -\frac{4kQq}{l^3} x$, пропорционально смещению.

Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a + \omega^2 x = 0$, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0 \cos \omega t$ и период равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

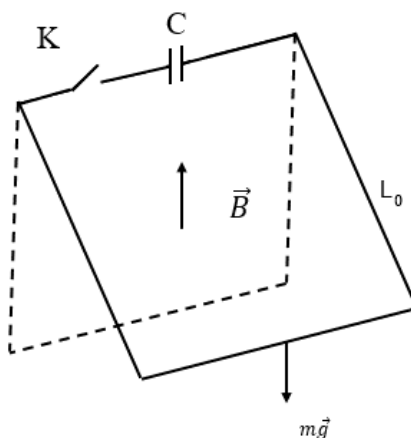
Для бусинки $a + \frac{4kQq}{m l^3} x = 0$. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{m l^3}}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m l^3}}} = \pi \sqrt{\frac{m l^3}{kQq}}$$

Ответ: Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 5. (20 баллов). Проводящий стержень массы m и длины L подвешен горизонтально на двух лёгких проводящих проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией B . Длина проводов L_0 . К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкости C , заряженный до разности потенциалов U . В некоторый момент замыкают ключ и конденсатор начинает разряжаться через проводящий стержень. Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после замыкания ключа. Считать, что разряд происходит за очень малое время.

Решение:



При подключении конденсатора по стержню начинает идти ток I , благодаря чему на стержень действует сила:

$$F_a = IBL,$$

направленная перпендикулярно стержню и вектору \vec{B} . Так как время Δt разряда конденсатора мало, то можно считать, что мало также и происходящее за это время смещение стержня от положения равновесия. Стержень лишь получит в горизонтальном направлении некоторый импульс \vec{P} . Разбив время t на малые промежутки Δt , в течение каждого из которых можно силу считать постоянной, получим:

$$p = \sum_i F_i \Delta t = BL \sum_i I_i \Delta t = BL \sum_i \frac{q_i}{\Delta t} \Delta t = BLq,$$

где q - заряд, прошедший по стержню при полном разряде конденсатора

$$q = CU$$

Тогда скорость стержня приобретенная в результате действия магнитного поля будет равна:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{BLCU}{m}$$

Угол отклонения системы от положения равновесия найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL_0(1 - \cos\alpha) = 2mgL_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Откуда получим значение угла:

Ответ: $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{BLCU}{2m\sqrt{gL_0}}\right)$