8-9 класс XXX Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии

1 вариант

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое в 198 раз больше суммы своих цифр. Решение обоснуйте.

Решение: Обозначим $\boldsymbol{x}$ – искомое число, $\boldsymbol{s}$ – сумма его цифр. Тогда $\boldsymbol{x} = \mathbf{198} \cdot \boldsymbol{s}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ делится нацело на 9. По признаку делимости на 9, число $\boldsymbol{s}$ делится на 9. Так как искомое число четырёхзначное, то для $\boldsymbol{s}$ возможны 4 варианта: $\boldsymbol{s} = \mathbf{9}$, $\boldsymbol{s} = \mathbf{18}$, $\boldsymbol{s} = \mathbf{27}$, $\boldsymbol{s} = \mathbf{36}$. Для каждого $\boldsymbol{s}$, соответственно, находим: $\boldsymbol{x} = \mathbf{1782}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{3564}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{5346}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{7128}$.

Подходящее: $\boldsymbol{x} = \mathbf{3564}$.

Ответ: 3564.

2. На координатной прямой отмечены 5 точек с координатами 2; 25; −5; 8; 9. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 5 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

Решение: Расположим числа в порядке возрастания: −5; 2; **8**; 9; 25. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ - сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0;\ 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $2x$, а до последних четырех – уменьшится на $2x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x, то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1;\ +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

Ответ: 8.

3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4, в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

Решение: Указанную в условии таблицу 4×4, можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3, произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}$, i, j = 1,2,3 равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$.

Ответ: 2187.

4. На границе Криптоландии установлена пропускная система, имеющая 17 входов и 17 выходов (входы перед границей, выходы – уже в Криптоландии). Входы и выходы занумерованы независимо друг от друга числами от 1 до 17, причем в неизвестном для посетителей Криптоландии порядке. От каждого входа проложен один «прямой» туннель к одному из выходов, причем от разных входов – к разным выходам. От каждого выхода проложен один «обратный» туннель ко входу с тем же номером, что у этого выхода. Посетитель сам выбирает один из входов. Войдя в него, он попадает в лифт, в котором есть 2 кнопки: зеленая – «ехать», красная – «выходить». Система работает следующим образом. Посетитель, находясь в лифте около входа, нажимает зеленую кнопку, лифт по прямому туннелю доставляет его к соответствующему выходу. Находясь в лифте около выхода, посетитель может: 1) нажать зеленую кнопку, и тогда лифт по обратному туннелю доставит его ко входу с тем же номером; 2) нажать красную кнопку, и тогда выход откроется, но только если его номер совпадает с номером того входа, через который посетитель вошел первоначально. В противном случае (при несовпадении номеров) посетитель будет удалён за пределы Криптоландии и сможет воспользоваться правом посещения только через год. Алиса решила провести каникулы в Криптоландии. При этом ей стала известна схема прямых туннелей системы пропуска:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
13	10	7	6	3	11	2	16	4	5	1	15	14	9	17	8	12

Здесь верхнее число является номером входа, а стоящее под ним число – номером того выхода, к которому ведет прямой туннель. За какое минимальное число поездок по туннелям Алиса сможет гарантированно попасть в Криптоландию? Ответ обоснуйте.

Решение: Если для начала движения выбран вход с номером 1, то далее перемещение по циклу 1-13-14-9-4-6-11. Для входа с номером 2: 2-10-5-3-7. Для входа с номером 8: 8-16. Последний цикл 12-15-17. Если бы был известен начальный номер входа, то решение сводилось бы к выбору нужного числа поездок по прямым туннелям из множества чисел {7,5,2,3}. Но поскольку этот номера неизвестен, то необходимо совершить НОК{7,5,2,3} = 210 поездок.

Ответ: 210.

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i. Потом по формулам $z_i' = r_{32}(z_i), i = 1, \dots, n$ получили числа $z_1', \dots, z_n'$ (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЗЪЦЫФМ**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **Г**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Решение: Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q. При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx (mod\ 32)$ или $x(1 + q) = z'(1 + p)(mod\ 32)$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y(mod\ n)$ равносильно $ax = ay(mod\ n)$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и шифрованного текста, получим равенство $3(1 + q) = 7(1 + p)(mod\ 32)$. Заметим, что $7 \cdot 5 = 3(mod\ 32)$. Тогда $3 \cdot 5 \cdot (1 + q) = 7 \cdot 5 \cdot (1 + p)(mod\ 32)$, что равносильно равенству
$5 \cdot (1 + q) = (1 + p)(mod\ 32)$.

Значит, $x(1+q) = 5(1+q)z'(mod\ 32)$. В итоге получаем, что $x = 5z'(mod\ 32)$. Остается воспользоваться полученным соотношением для остальных букв. Получится слово **ГВОЗДЬ**.
Ответ: ГВОЗДЬ.

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 5$). Поданный на вход набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\boldsymbol{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\boldsymbol{x})$ на вход, получим на выходе набор $h(h(\boldsymbol{x})) = h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\boldsymbol{x})$ и т.д. Докажите, что если все наборы $\boldsymbol{x}$, $h(\boldsymbol{x})$, $h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, … , $h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1}$.
Решение: Заметим, что для всех $\boldsymbol{x}$ вектор $h(\boldsymbol{x})$ содержит четное число единиц, так как
$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots, \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0$.
Значит в рассматриваемой последовательности $\boldsymbol{x}$, $h(\boldsymbol{x})$, $h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, … , $h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1} . Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$ Таким образом $k \leq 2^{n-1}$.