11 класс

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

1. Есть 101 клетка. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр от 0 до 9. Если после заполнения всех клеток сумма всех записанных цифр будет делиться на 11, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 11 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Решение:

Выигрышная стратегия будет у первого игрока. Опишем её:

Чтобы выиграл первый игрок, нам необходимо, чтобы на 101 шаге сумма всех цифр делилась на 11, то есть остаток от деления на 11 был равен "0". Мы сможем это обеспечить тогда и только тогда, когда после 100-ого шага сумма всех цифр будет давать любой остаток от деления на 11, кроме "1". Чтобы это гарантировать, после 99-ого шага сумма должна давать остаток "2". Это получится, если на 98-ом шаге, остаток будет любым, кроме "3". Тогда первому игроку на 97-ом шаге надо обеспечить остаток "4", на 95-ом остаток "6", 93-ем остаток "8", 91-ом остаток 10, 89-ом остаток "1", и так далее, на 3-ем остаток "10", на 1-ом остаток "1".

Ответ: первый.

2. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{100}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

Решение: Чтобы понять сколько цифр содержится в записи натурального числа a, надо найти такое неотрицательное целое число n, что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Такое число n, очевидно, единственно. (Например, $10^2 \leq 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.) Итак, надо найти такое целое неотрицательное n, что $10^n \leq 2^{100} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$. Возведя обе части в степень $\frac{1}{2}$, получим $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{30+\frac{1}{2}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{100} содержится 31 цифра.

Ответ: 31.

3. Сократите дробь $\frac{2x^6+5x^4-3x^3+2x^2-12x-14}{4x^6-4x^4-6x^3-3x^2+25x-28}$. В результате сокращения степени многочленов в числителе и знаменателе должны уменьшиться.

Решение: Найдем наибольший общий делитель многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, используя алгоритм Евклида.

Для этого поделим с остатком знаменатель на числитель:

$$4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28 =$$
$$= 2 \cdot (2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14) - 14x^4 - 7x^2 + 49$$

В результате деления получили остаток $-14x^4 - 7x^2 + 49$. Теперь числитель (который сейчас выступал в роли делителя) поделим (например, «уголком») на остаток:

$$2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14 == (-14x^4 - 7x^2 + 49) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{7}\right) + 4x^3 + 2x - 14.$$

Далее надо опять разделить делитель на остаток. В этот раз остаток от деления оказывается равным нулю:

$$-14x^4 - 7x^2 + 49 = -\frac{7x}{2} \cdot (4x^3 + 2x - 14).$$

Это означает, что многочлен $4x^3 + 2x - 14$ является искомым наибольшим общим делителем числителя и знаменателя исходной дроби и он может быть «вынесен за скобки» (чтобы избежать появления дробных коэффициентов, будет удобнее использовать многочлен $2x^3 + x - 7$):

Итак,

$$\frac{2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14}{4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28} = \frac{(2x^3 + x - 7) \cdot (x^3 + 2x + 2)}{(2x^3 + x - 7) \cdot (2x^3 - 3x + 4)}.$$

Ответ: Например, $\frac{x^3+2x+2}{2x^3-3x+4}$.

4. Решите уравнение $8cos^5x - 5cosx - 2cos3x = 1$.

Решение: надо догадаться выразить cos^5x через $\cos 5x$. Тогда исходное уравнение приведётся к виду $\cos 5x + cos3x = 2$. Последнее равенство возможно только при выполнении условия $\begin{cases} \cos 5x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z.$

5. Известно, что положительные числа x, y, z удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 529 \\ x^2 + z^2 + \sqrt{3}xz = 441 \\ z^2 + y^2 = 144 \end{cases}$$

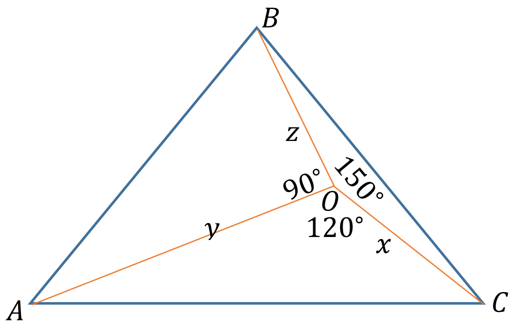
Найдите значение выражения $\sqrt{3}xy + 2yz + xz$.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC с выбранной внутри него точкой O так, что $AO = y$, $OB = z$, $OC = x$, $\angle AOB = 90°$, $\angle AOC = 120°$, $\angle BOC = 150°$ (см. рис.).

Условия системы представляют собой теорему косинусов (в т.ч. теорему Пифагора) для треугольников AOB, AOC, BOC.

Отсюда нетрудно понять, что $AB = 12$, $BC = 21$, $AC = 23$. Теперь заметим, что



$$\sqrt{3}xy + 2yz + xz = 4S_{AOC} + 4S_{AOB} + 4S_{BOC} = 4(S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC}) = 4S_{ABC}.$$

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$p = \frac{12 + 21 + 23}{2} = 28, \qquad S_{ABC} = 56\sqrt{5}.$$

Следовательно, $4S_{ABC} = 224\sqrt{5}$.

Ответ: $224\sqrt{5}$.

6. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \dots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \dots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

Решение:

Искомое число наборов находим суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп:

При k=0 такой набор единственный;

При k=2 $\sum_{1 \le i < j \le 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2)$;

при k=4 $\sum_{1 \le i < j < l < s \le 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2) \cdot (2^{n_l} - 2) \cdot (2^{n_s} - 2)$;

…

при k=10 $(2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2)$.

Определим многочлены $\sigma_k(x_1, \dots, x_{10}) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le 10} x_{i_1}, \dots, x_{i_{10}}$.

Тогда искомое число равно $N = \sigma_0(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \sigma_2(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \dots + \sigma_{10}(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1)$.

Заметим, что

$\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = (x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1)$;

$\sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10}) = (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1)$;

$$\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) +$$
$$+ \sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10})$$
$$= 2(\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10})).$$

Отсюда получим $\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{2}((x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1) + (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1))$.

Следовательно,

$N = \frac{1}{2} \cdot 2^{n_1} \cdot \dots 2^{n_{10}} + (-2^{n_1} + 1 + 1) \cdot \dots \cdot (-2^{n_{10}} + 1 + 1) = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2)$.

7. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех натуральных чисел от n до m, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \ge 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2022.

Решение: рассмотрим числа вида $a_{n,1}$, где n – нечётное. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2022. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2022. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$ и число $a_{n,k+1}$ является чётным. Так как $2022 = 2 \cdot 1011$ и числа

1011 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 1011, а следовательно, и на 2022.

8. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 6xy$, где x и y – натуральные числа

Решение: Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть пара натуральных чисел (x_0, y_0) удовлетворяет исходному уравнению

$$x^2 + y^2 + 1 = 6xy. \qquad (1)$$

Тогда

1) $x_0 \neq y_0$;

2) уравнение (1) имеет еще одно решение в натуральных числах $(6y_0 - x_0, y_0)$.

Доказательство: 1) Положив $x_0 = y_0 = a$ и подставив в (1), получим $2a^2 + 1 = 6a^2$. Очевидно, что $a \notin \mathbb{N}$,

2) По условию, число x_0 является корнем многочлена

$$\psi(x) = x^2 - 6y_0x + y_0^2 + 1. \qquad (2)$$

По теореме Виета, этот многочлен еще имеет корень x_2, причем $x_2 + x_0 = 6y_0, x_2x_0 = y_0^2 + 1$. Отсюда следует, что $x_2 = 6y_0 - x_0$ и $x_2 \in \mathbb{N}$.

Утверждение доказано.

Предположим, что какое-то решение (x_0, y_0) уравнения (1) найдено. Без ограничения общности можно считать, что в этой паре $x_0 > y_0$ (неравенство строгое в силу пункта 1 утверждения). Будем это записывать как $\max(x_0, y_0) = x_0$. Согласно утверждению, уравнение (1) еще имеет решение $(6y_0 - x_0, y_0)$. Это означает, что для многочлена (2) справедливы равенства $\psi(x_0) = \psi(6x_0 - y_0) = 0$. Заметим, что $\psi(y_0) = y_0^2 - 6y_0^2 + y_0^2 + 1 < 0$. Поэтому число y_0 лежит между корнями многочлена (2), а именно: $x_0 > y_0 > 6y_0 - x_0$. Следовательно, $\max(6y_0 - x_0, y_0) = y_0 < \max(x_0, y_0)$. Итак, для любого решения (x_0, y_0) существует другое решение, у которого максимальный элемент окажется меньше. Таким образом, мы можем строить новые решения, у которых максимальный элемент становится все меньше. Но при этом этот максимальный элемент, постоянно уменьшаясь, остается натуральным числом, что невозможно. Пришли к противоречию. Значит, исходное уравнение (1) решений в натуральных числах не имеет.

Ответ: Таких пар нет.