Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

Вариант 1

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f\big(f(m)\big)$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

Решение: Заметим, что $m^3 > m$ при $m > 1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d \neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m) = m^3 - m + 1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \ldots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.

2. Даны три числа a, b, c такие, что $a + b + c = 1$ и $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$.

Решение: Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3, B=-b+1/3, C=-c+1/3$. И, поскольку числа a,b,c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \geq -2/3. \qquad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2 = -A^3-A^2-B^3-B^2-C^3-C^2+4/9$, и доказываемое неравенство принимает вид $A^2+A^3+B^2+B^3+C^2+C^3 \geq 0$ или $A^2(1+A)+B^2(1+B)+C^2(1+C) \geq 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что $\max\limits_{0\leq x\leq 1}\left(x(x-1)^2\right) = 4/27$, *максимум достигается при* $x = 1/3$.

3. Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ на многочлен $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6$ с остатком: $P(x) = F(x)Q(x) + R(x)$. Общие корни многочленов $P(x), Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке $-x^2 - x + 3$. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n>2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Чтобы при каком-то натуральном n имело место неравенство $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$, должно существовать натуральное число m такое, что $\sqrt{9n+2}<m\le\sqrt{9n+4}\Leftrightarrow 9n+2<m^2\le 9n+4$. Следовательно, m^2 равен либо $9n+3$, либо $9n+4$. Но квадрат целого числа при делении на 9 не может дать остаток 3. Значит, остается вариант $m^2=9n+4$. Итак, будем искать такие n, при которых число $9n+4$ представляет собой полный квадрат. При делении на 9 квадрат целого числа дает остаток 4, только когда само число при делении на 9 дает остаток 2. Поэтому, полагаем $m=9t+2,\ t\in\mathrm{N}_0$. Далее $(9t+2)^2=9n+4\Leftrightarrow n=9t^2+4t$. Остается выбрать наименьшее натуральное t такое, что $9t^2+4t\ge 2015$. Для этого оценим больший корень уравнения $9t^2+4t-2015=0$:

$$t_{\max}=\frac{-2+\sqrt{4+9\cdot 2015}}{9}.$$

Поскольку $134<\sqrt{4+9\cdot 2015}<135$, заключаем, что $14<t_{\max}<15$, и искомое n равно $9\cdot 15^2+4\cdot 15=2085$.

Ответ: 2085.

5. Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1),\ a_2=r_n(1+i_2),\ldots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки (i_1,i_2,i_3)= (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=$ (1,0,2), т.к. $r_3(0+1)=1,\ r_3(1+2)=0,\ r_3(2+0)=2$.)

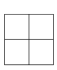
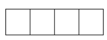
а) При $n=9$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_9)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_9)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n=10$, то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\ldots,i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

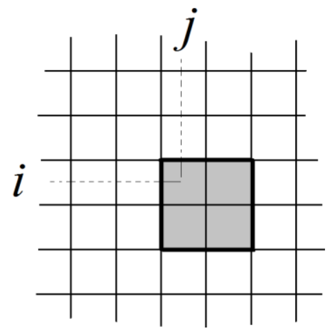
Решение: а) Например, $(i_1,i_2,\ldots,i_9)=(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+9)+(i_1+\ldots+i_{10})=a_1+\ldots+a_{10}\ (\mathrm{mod}\ 10)$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 45. Но равенство $45+45=45\ (\mathrm{mod}\ 10)$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ есть одинаковые.

6. Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую. После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.

 -1 тип  - 2 тип

Решение: Пусть сейчас у нас дно ящика уложено плитками двух типов. Поставим каждой плитке в соответствие число. Рассмотрим, к примеру, плитку 1-го типа. Пусть ее верхний левый угол лежит в i-той строке и j-том столбце, то есть имеет координаты (i,j). Остальные три ячейки этой плитки имеют координаты (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1). Сложим координаты всех ее четырех ячеек: $i+j+(i+1)+j+i+(j+1)+(i+1)+(j+1)=4i+4j+4$, затем вычислим остаток от деления на 4 получившейся суммы – это 0. Итак, плитке первого типа мы поставили по определенному правилу в соответствие число (ноль), и, что важно, это число не будет меняться, если плитку передвигать. По такому же правилу, плитка 2-го типа (неважно горизонтальна она или вертикальна), после сложения координат ее ячеек и взятия остатка от деления на 4, получит в соответствие число 2. Теперь для всех плиток сложим поставленные им в соответствие числа и у полученной суммы вычислим остаток от деления на 4. Получится некоторое число S, которое, очевидно, равно (по модулю 4) сумме координат всех ячеек на дне ящика. Таким образом, S – уникальное число, которое определяется лишь размерами дна ящика (числом строк и столбцов) и *не зависит от способа замощения плитками.* Если бы после замены плитки 1-го типа на плитку 2-ого типа, вновь удалось бы замостить дно, то сумма S изменилась бы на 2, что невозможно.



Ответ: не могло.

7. Найдите значение выражения $a^4+b^4+c^4$, если известно, что числа a,b,c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

Решение: Обозначим $X=a+b+c$, $Y=a^2+b^2+c^2$, $Z=a^3+b^3+c^3$, $U=ab+bc+ac$. Тогда $X^2=Y+2U$, откуда

$$U=\left(X^2-Y\right)/2. \qquad (1)$$

Далее

$$X^3=Z+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc=$$

$$=Z+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c)-3abc=Z+3UX-3abc.$$

Отсюда

$$abc=\left(-X^3+Z+3UX\right)/3. \qquad (2)$$

Наконец,

$$XZ=a^4+b^4+c^4+a\left(b^3+c^3\right)+b\left(a^3+c^3\right)+c\left(a^3+b^3\right)=$$

$$=a^4+b^4+c^4+\left(ab+bc+ac\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-c^2ab-a^2bc-b^2ac=$$

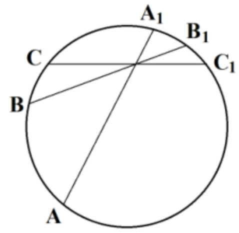
$$=a^4+b^4+c^4+UY-abcX.$$

Находим искомое выражение:

$$a^4+b^4+c^4=XZ-UY+abcX. \qquad (3)$$

По условию $X=4,Y=9,Z=19.$ Из (1) находим $U=7/2,$ затем из (2): $abc=-1,$ и с помощью (3) получаем ответ: $a^4+b^4+c^4=81/2.$

Ответ: 81/2.



8. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.

Решение: Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

1) Пусть угловая мера дуги AB (рис.1) равна φ. (Это означает, что φ равен соответствующий центральный угол AOB.) Тогда длина хорды $AB = 2R\sin\left(\varphi/2\right)$. Здесь R – радиус окружности.

2) Пусть две хорды AA_1 и BB_1 пересекаются в точке T (рис.2). Угловые меры дуг AB и A_1B_1 равны φ и v. Треугольники ATB и A_1TB_1 подобны по двум углам (равные углы отмечены). Коэффициент подобия $k = AB / A_1B_1 = \sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)$.

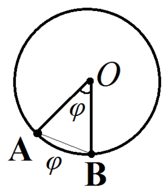


Рис.1

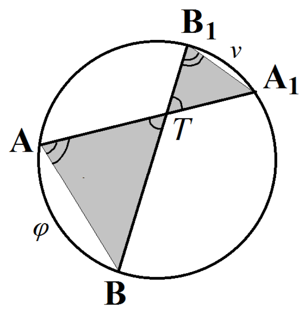


Рис.2

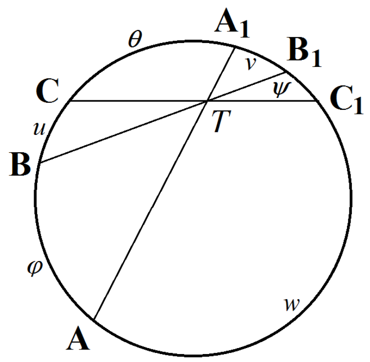


Рис.3

3) Обратимся к рисунку 3. В одной точке, обозначенной Т, пересекаются три хорды. Угловые меры получившихся шести дуг отмечены на рисунке. Из подобия треугольников ATB и A_1TB_1 следует (см. пункт 2) равенство $AT / B_1T = \sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)$. Аналогично, $\Delta BTC \sim \Delta B_1TC_1 \Rightarrow B_1T / CT = \sin\left(\psi/2\right)/\sin(u/2)$, $\Delta CTA_1 \sim \Delta ATC_1 \Rightarrow CT / AT = \sin\left(\theta/2\right)/\sin(w/2)$.

Перемножив три последних равенства, получим:

$1 = AT / B_1T \cdot B_1T / CT \cdot CT / AT = \sin\left(\varphi/2\right)/\sin(v/2)\cdot\sin\left(\psi/2\right)/\sin(u/2)\cdot\sin\left(\theta/2\right)/\sin(w/2)$.

Таким образом, необходимым (а на самом деле и достаточным) условием того, что три хорды пересекаются в одной точке является равенство:

$$\sin\left(\varphi/2\right)\sin\left(\theta/2\right)\sin\left(\psi/2\right) = \sin(u/2)\sin(v/2)\sin(w/2).$$

Теперь несложно получить ответ в задаче. Подставив в это соотношение данные задачи $w = 150^0, \varphi = 30^0, \theta = 60^0, v = 30^0$, а также выразив u из равенства $\varphi + u + \theta + v + \psi + w = 360^0$, получаем для определения искомого угла ψ следующее уравнение:

$$\sin 15^0 \sin(\psi/2)\sin 30^0 = \sin 15^0 \sin\left((90^0 - \psi)/2\right)\sin 75^0.$$

Отсюда несложно получить, что $\psi = 60^0$.

Ответ: 60^0.