

**Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе
ведомственных образовательных организаций
в 2018-2019 учебном году**

10 класс

Вариант 1

Задача 1. (20 баллов). Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравнили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравнивать весы грузом массой $m = 0,13$ г. Определить радиус капилляра r . Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) $\alpha = 0,073$ Н/м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравнивания весов можно записать следующим образом

$$mg = 2 \cdot 2\pi r \alpha.$$

Отсюда получаем ответ.

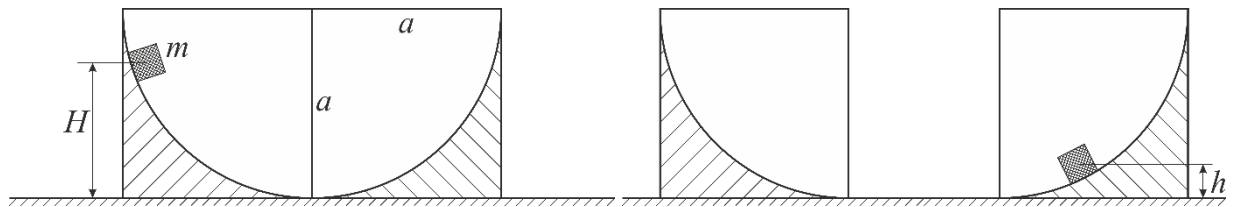
$$\text{Итого: } r = \frac{mg}{4\pi\alpha} = 1,4 \text{ мм.}$$

Задача 2. (20 баллов). Частица в прямоугольном сосуде, имевшая скорость V , столкнулась последовательно с тремя взаимно перпендикулярными стенками. Найти изменение вектора скорости частицы ΔV . Все столкновения считать абсолютно упругими.

Решение:

При упругом столкновении отражение частицы от стенки является зеркальным, при этом сохраняется компонента импульса, параллельная стенке, а перпендикулярная меняет направление на противоположное. Пусть ось Ox перпендикулярна первой стенке, с которой столкнулась частица, а вектор импульса частицы до столкновения имеет проекции на оси (p_x, p_y, p_z) . Тогда, после столкновения с первой стенкой вектор импульса будет иметь проекции $(-p_x, p_y, p_z)$. Выберем направление оси Oy так, чтобы она была перпендикулярна второй стенке, тогда после столкновения со второй стенкой вектор импульса будет иметь проекции $(-p_x, -p_y, p_z)$, а после столкновения с третьей, которой перпендикулярна ось Oz , получим, соответственно проекции $(-p_x, -p_y, -p_z)$. Таким образом, после трех столкновений вектор импульса, а, следовательно, и скорости поменяют свое направление на противоположное. Вектор скорости будет равен $-V$, а изменение вектора скорости $\Delta V = -V - V = -2V$.

Задача 3. (20 баллов). В половине куба с длиной ребра, a из материала с плотностью ρ сделана полусферическая выемка диаметра, a (см. рис.). Оставшуюся часть распилили пополам по вертикали и положили на гладкую горизонтальную поверхность. Небольшое тело массы m поместили на внутреннюю стенку первой половины на высоту H и отпустили. На какую высоту h тело поднимется на второй половине? Трение не учитывать.



Решение:

Пусть масса левой и правой части равна M , скорость тела m в нижней точке траектории – U , скорость левой части в этот момент – V . Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$mgH = \frac{mU^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \quad (1)$$

$$MV = mU \quad (2)$$

Пусть скорость тела m в верхней точке траектории – U_1 , скорость правой части в этот момент – тоже U_1 . Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{mU^2}{2} = \frac{(m+M)U_1^2}{2} + mgh \quad (3)$$

$$mU = (m+M)U_1 \quad (4)$$

Выразим V из уравнения (2) и подставим ее и в (1). Выразим U^2 из получившегося уравнения.

$$U^2 = \frac{2MgH}{m+M}$$

Выразим U_1 из уравнения (4).

$$U_1 = \frac{m}{m+M}U$$

Подставим U^2 и U_1 в уравнение (3) и получим соотношение (5).

$$h = \frac{M^2}{(m+M)^2}H \quad (5)$$

Найдем массу M . Эта масса равна массе целого куба, минус масса удаленного шара, деленной на четыре.

$$M = \left(\rho a^3 - \rho \frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{8} \right) / 4 = \rho a^3 \frac{6-\pi}{24}$$

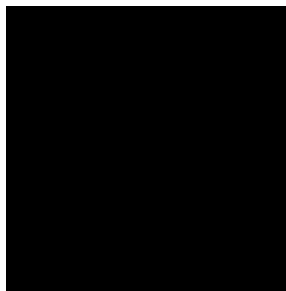
Подставив массу M в уравнение (5) получим ответ.

$$h = H \frac{\rho^2 a^6 (6-\pi)^2}{(24m + \rho a^3 (6-\pi))^2}$$

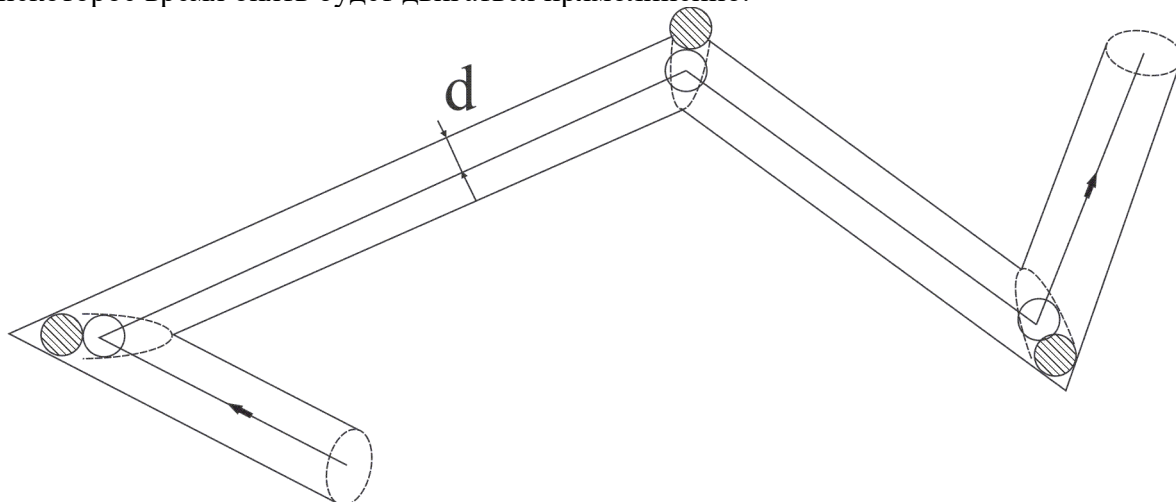
Задача 4. (20 баллов). В ряде случаев молекулу газа позволительно представлять в виде шарика диаметра d . Найти число столкновений ν в единицу времени выделенной молекулы газа с другими молекулами. Средняя скорость относительного движения молекул газа $\langle V_{отн} \rangle$, концентрация молекул n .

Решение:

Минимальное расстояние на которое сближаются при столкновении центры двух молекул равно диаметру молекулы d (это расстояние называется эффективным диаметром молекулы) смотри рисунок.

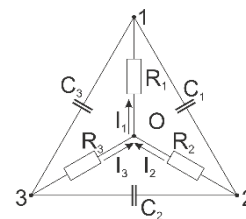


Для того, чтобы посчитать среднее число столкновений ν , предположим, что все молекулы, кроме данной застыли неподвижно на своих местах (тогда она движется со средней скоростью относительного движения $\langle V_{\text{отн}} \rangle$). Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой смотри рисунок 2. Это соударение произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии меньшем эффективного диаметра молекулы d . В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно.



За секунду наша молекула проходит с среднем путь, равный средней скорости относительного движения $\langle V_{\text{отн}} \rangle$. Число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно числу молекул, центры которых попадают внутри колеччатого цилиндра длины $\langle V_{\text{отн}} \rangle$ и радиуса d . Так как в газе расстояние между молекулами много больше их диаметра, мы можем считать объем цилиндра равным: $\pi d^2 \langle V_{\text{отн}} \rangle$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n , получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижной.

Задача 5. (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3 . Найдите заряд на конденсаторе C_1 .

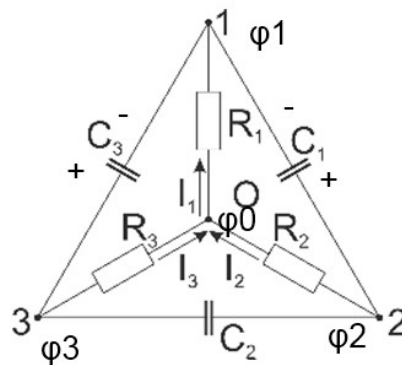


Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов,

протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R, \quad (1).$$

Аналогично для тока I_1 :

$$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R \quad (2).$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$$

Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1 . В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Подставив вместо U , разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$$q_1 = C_1 R(I_1 + I_2).$$