Вариант 1

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите максимум суммы $a + b + c$, где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение: Заметим, что

$$a - b + c = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz$, $B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + {}$ $+4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).
2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.
3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.
   - $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
   - $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
   - $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Ответ: 2

2. Найдите значение $f(2019)$, если известно, что $f(x)$ одновременно удовлетворяет трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$;
3) $f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение: В тождестве из условия задачи

$$f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot \big(f(1) + f(0)\big) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

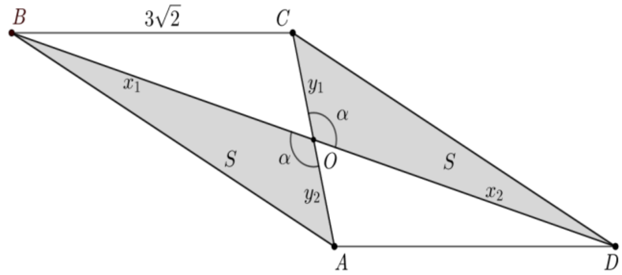
$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$

Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$.

Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи. Итак, $f(x) = x$.

Ответ: 2019

3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите наименьшую площадь, которую будет иметь такой четырехугольник.



Решение: Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2\sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1\sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Ответ: 6

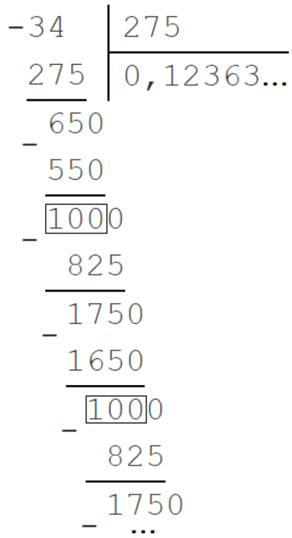
4. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010 \ldots 101$ (единицы и нули чередуются).

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010 \ldots 101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

Ответ: 101.

5. Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900} = 0{,}25712712712\ldots = 0{,}25(712)$ равна 3.)



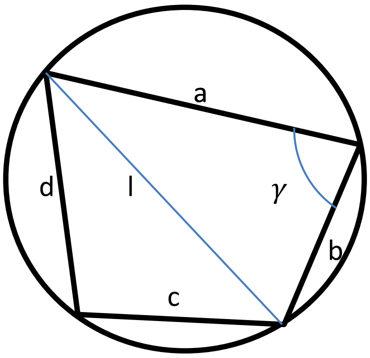
Решение: Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем $\frac{34}{275} = 0{,}123636363\ldots = 0{,}123(63)$. Получена непериодическую часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают *различные* числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу $r_1 = 65$ (остатку от деления на 275 числа 340). То есть $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) \vdots 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет вид $\frac{1}{221} = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$. Найдем n. Обозначим $A = a_1a_2\ldots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n}\cdot A + 10^{-2n}\cdot A + \cdots$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n, при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13 \cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит число k_1 делится на 17, то есть $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13\cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n, что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 13, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 1, \ldots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6{,}16) = 48$.

Ответ: 48.

6. Известно, что длины сторон выпуклого четырёхугольника равны соответственно $a = 4, b = 5, c = 6, d = 7$. Найти радиус R окружности, описанной вокруг этого четырёхугольника. В качестве ответа привести целую часть R^2.



Решение По теореме косинусов выразим длину диагонали: $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \gamma)$. Отсюда получим $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

Поскольку $R = \frac{l}{2\sin\gamma}$, получаем $R^2 = \frac{l^2}{4(1-\cos^2\gamma)}$.

Для указанных длин сторон получаем $R^2 = \frac{2074799}{131040}$.

Ответ: 15