РЕШЕНИЯ

X X I МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

10 КЛАСС

1. Заметим, что если вторая (центральная) шестеренка повернута на x позиций по часовой стрелке относительно начального положения, то буква в окошке меняется на букву, отстоящую от нее на x позиций, но против часовой стрелки.

При этом шестеренки с цифрами будут повернуты **против часовой стрелки** и так как $30 = 5\times 6$, то появившиеся в окошках цифры однозначно определяют величину x сдвига относительно начального положения, которым можно считать положение, при котором на цифровых шестеренках выставлены две единицы (см. таблицу).

цифра на 3-ем колесе \ цифра на 1-ом колесе	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	6	12	18	24
2	25	1	7	13	19
3	20	26	2	8	14
4	15	21	27	3	9
5	10	16	22	28	4
6	5	11	17	23	29

Рассмотрим теперь текст:

```
43 33 55 11 11 31 42   24 32 45 56 13 44 31
      55 16   23 55 22 15 56 33 56 15
```

Заменим пары цифр на величины поворотов:

8	2	4	0	0	12		21	7	28	29	20	3	12
	4	5		26	4	1	10	29	2	29	10		

Предположим, что удвоенная буква в первом слове – это **Н.** Тогда найдём числовые величины поворота второго колеса, соответствующие всем буквам.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ж**	**З**	**И**	**К**
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
Л	**М**	**Н**	**О**	**П**	**Р**	**С**	**Т**	**У**	**Ф**
2	1	0	29	28	27	26	25	24	23
Х	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**
22	21	20	19	18	17	16	15	14	13

Заменим величины поворотов на буквы, получим ответ.

Ответ: **ДЛИННАЯ ЦЕПОЧКА ИЗ СИМВОЛОВ**

2. Обозначим через $r_{257}(x)$ – остаток от деления на 257 числа x. Так как

$$r_{257}(a^x) = 4 = r_{257}(4) = r_{257}(2^2) = r_{257}\left(\left(r_{257}(a^t)\right)^2\right) = r_{257}(a^{2t}),$$

где $1 \le t \le 256$, $r_{257}(a^t) = 2$. Тогда $x = 2t$ *или* $x = 2t - 256 = 2t'$. Тогда

$$r_{257}(a^{xy}) = r_{257}\left((251)^x\right) = r_{257}\left(r_{257}(-6)^x\right) = r_{257}\left((-1)^{2t} a^x\right) = r_{257}(a^x) = 4.$$

Ответ: 4

РЕШЕНИЯ

X X I МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

10 КЛАСС

3. Если число городов m^k, а число провинций m и в каждой по m^{k-1} городов, то отнесем к каждой провинции с номером $\boldsymbol{i}$ города с названиями $(a_{0,} \ldots, a_{k-1})$, удовлетворяющими условиям: сумма $a_0 + a_2 \ldots + a_{k-1}$ кратна $\boldsymbol{i}$. Очевидно, что каждый город будет отнесен к какой-либо провинции и, любые два города в одной провинции будут отличаться не менее чем в 2-х символах.

4. Составим таблицу, в которой каждый столбец сформирован из букв, находящихся на той же клавише, что и исходная:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	21	22	23	24
И	**Р**	**А**	**К**	**Т**	**А**	**Л**	**И**	**Я**	**З**	**О**	**В**	**С**	**А**	**Л**	**А**	**Т**	**Д**	**О**	**Л**	**Г**	**М**	**Е**	**Л**	**Ь**
И	Р	А	И	Р	А	И	И	Ь	Д	М	А	Р	А	И	А	Р	Д	М	И	А	М	Д	И	Ь
Й	С	Б	Й	С	Б	Й	Й	Э	Е	Н	Б	С	Б	Й	Б	С	Е	Н	Й	Б	Н	Е	Й	Э
К	Т	В	К	Т	В	К	К	Ю	Ж	О	В	Т	В	К	В	Т	Ж	О	К	В	О	Ж	К	Ю
Л	У	Г	Л	У	Г	Л	Л	Я	З	П	Г	У	Г	Л	Г	У	З	П	Л	Г	П	З	Л	Я

Серым цветом выделены те тройки столбцов, которые, по всей видимости, отвечают вставленному пробелу. Так как символ пробела в тексте встречается чаще любой триграммы, то из приведенной таблицы можно сделать вывод, что знак пробела содержится именно в столбцах **РАИ** (нетрудно из букв этих столбцов составить слово, например, **РАЙ**). Двух в подряд идущих пробелов быть не может. Предположение о том, что столбцы 2,3,4 не образуют пробел оказывается верным (это случайное совпадение), при этом зигзагообразно читаем:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	21	22	23	24
И	**Р**	**А**	**К**	**Т**	**А**	**Л**	**И**	**Я**	**З**	**О**	**В**	**С**	**А**	**Л**	**А**	**Т**	**Д**	**О**	**Л**	**Г**	**М**	**Е**	**Л**	**Ь**
И	**Р**	**А**	И	Р	А	И	И	**Ь**	**Д**	М	А	Р	А	И	А	**Р**	Д	М	И	**А**	М	**Д**	**И**	Ь
Й	С	Б	**Й**	С	Б	Й	Й	Э	Е	Н	Б	С	Б	Й	Б	С	**Е**	**Н**	Й	Б	**Н**	Е	Й	Э
К	Т	В	К	Т	В	К	К	Ю	Ж	**О**	**В**	Т	В	К	В	Т	Ж	О	К	В	О	Ж	К	Ю
Л	У	Г	Л	У	Г	Л	**Л**	Я	З	П	Г	У	Г	Л	**Г**	У	З	П	**Л**	Г	П	З	Л	**Я**

Ответ: **КРАЙ ЛЬДОВ ГРЕНЛАНДИЯ**

5. Обозначим через $r_M(b)$ - остаток от деления числа b на M.

Запишем чему равно число S' согласно определению деления натуральных чисел с остатком:

$$S' = r_M(S \cdot u) \quad \Leftrightarrow \quad Su = Mq_1 + S', 0 \le S' < M, \; q_1 \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

Поскольку известно, что остаток от деления $13 \cdot u$ на M равен 1, то запишем:

$$13u = Mq_2 + 1, q_2 \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

Домножим обе части (1) на 13 и подставим в полученное равенство вместо $9 \cdot u$ равенство (2). Имеем:

$$13Su = 13Mq_1 + 13S' \Longrightarrow S(Mq_2 + 1) = 13Mq_1 + 13S'$$

$$13S' = M(Sq_2 - 13q_1) + S \tag{3}$$

Заметим далее, что натуральное число $S \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 48 < 49 = M$. Поэтому полученное равенство (3) есть не что иное, как деление $13S'$ с остатком на M и, кроме того, $r_M(13S') = S$. Таким образом, найдя остаток от деления $13S'$ на M, получим исходное число S.

В нашем случае, $S = r_M(13S') = r_{49}(13 \cdot 47) = r_{49}(611) = 23$. Теперь, зная S, осталось найти (x_1, x_2, x_3, x_4). Но это делается легко. Действительно, равенство $x_4 = 0$ очевидно, поскольку $S < 25$. Дальше можно перебрать все возможные восемь вариантов, либо сразу заметить, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (что просто угадывается), либо последовательно вычитать из S числа a_3, a_2, a_1 пока не получим нуль, полагая при этом, что соответствующий $x_i = 1$.

Ответ: **(1,1,1,0)**.

6. Поместим точку C в начало декартовой системы координат, а точку B на ось абсцисс, как показано на рисунке. Тогда точки C, B, A будут иметь координаты $C(0,0), B(2,0), A(1,\sqrt{3})$. Геометрическое место точек $K(x,y)$ таких, что $BK:CK=1:2$ представляет собой окружность. Действительно,

$$\frac{BK^2}{CK^2}=\frac{(x-2)^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{4},$$

что эквивалентно

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}. \qquad (1)$$

Аналогично, геометрическое место точек M таких, что $AM:MC=1:2$ - окружность, заданная уравнением

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16}{9}. \qquad (2)$$

Чтобы расстояние между точками K (лежащей на окружности (1)) и M (на окружности (2)) было максимально, эти точки следует расположить на прямой, проходящей через центры окружностей. (Отметим, что жюри приняло решение не снижать оценку за задачу, если школьник этот факт использовал, но его доказательство не привел.)

Таким образом, искомое максимальное расстояние равно расстоянию между центрами окружностей (1), (2) плюс длины их радиусов:

$$MK_{\max}=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}.$$

Ответ: $16/3$.