Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

2. Найдите $\log_{(a\sqrt{b})}(b\cdot\sqrt{a})$, если $\log_{(ab)}(b\cdot a^{-1})=0,25$.

3. Известно, что для углов α и β выполняются условия:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}; \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{3}; \\ \alpha,\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\sin(\alpha+\beta)$.

4. Решите уравнение $25^x+30=7\cdot5^{x+0,5}$.

5. Сумма первых трёх членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии в семь раз больше суммы всех последующих (начиная с четвертого) членов. Найдите знаменатель прогрессии.

6. Две окружности O_1 и O_2 радиусов 6 и 3 соответственно, касаются внутренним образом в точке *A*, *AB* – диаметр окружности O_1. Из точки *B* проведена касательная к окружности O_2, пересекающая O_1 в точке *M*. Найдите расстояние от точки *M* до центра окружности O_2.

7. Моторной лодке полного бака бензина хватает, чтобы по течению реки спуститься на 30 км, а подняться против течения – на 20 км (двигатель работает постоянно и равномерно). На какое максимальное расстояние может спуститься лодка по течению реки (с первоначально полным баком), чтобы суметь вернуться обратно?

8. Найдите все значения параметра *a*, при которых наименьшее значение функции $f(x)=x+2a-\sqrt{x-a}$ больше 1.

РЕШЕНИЕ
Вариант 1

1.

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}\Rightarrow x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+6)(x+1)}=12\Rightarrow x^2+7x-30=0\Rightarrow x=3; x=-10$

$x=-10$ не подходит по О.Д.З. Проверкой убеждаемся, что $x=3$ подходит.
Ответ $x=3$.

2. Ответ $\frac{13}{11}$.

3. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$. Учитывая, что $-\pi\le\alpha+\beta\le 0$, найдём $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Ответ: $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{35}}{6}$.

4. Замена $t=5^x$. Получим уравнение $t^2-7\sqrt{5}t+30=0$. Отсюда $t=\sqrt{5}$ или $t=6\sqrt{5}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $x=\log_5 6\sqrt{5}$.

5. Из условия задачи получим уравнение $b_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7b_1q^3}{1-q}$. Отсюда $q=\frac{1}{2}$.

Ответ: $q=\frac{1}{2}$.

6. Обозначим угол $MBA=\beta$. Тогда из прямоугольного треугольника BKO_2 найдём $\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Из треугольника MBA найдём $BM^2=AB\cos(\beta)=8\sqrt{2}$. Из треугольника MBO_2 найдём $O_2M^2=81+128-2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 9\cdot 8\sqrt{2}=17$.

Ответ: $O_2M=\sqrt{17}$.

7 . $\frac{1}{30}$ литра на 1 км – расход бензина по течению реки, $\frac{1}{20}$ – против течения, 1 литр – объём бака, S – искомое максимальное расстояние. Тогда из условия задачи получим уравнение $\frac{S}{20}+\frac{S}{30}=1$. Отсюда $S=12$ км.

Ответ: $S=12$.

8. $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$. Критическая точка при $x=a+\frac{1}{4}$. Очевидно, что это точка минимума функции(подходит по О.Д.З). Тогда из условия задачи:

$f(a+\frac{1}{4})=3a+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}>1$. Отсюда $a>\frac{5}{12}$.

Ответ: $a>\frac{5}{12}$.