

Вариант 1

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 9 минут, а сноубордист – за 7 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 17:45. Определите время подъёма от подножия до вершины.

Решение:

Обозначим время подъёма от подножия до вершины горы через x . Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 345 минут. Значит впервые на вершине горы они встретятся через $345 + x$ минут. В таком случае x – это такое минимальное натуральное число, что

$$(7+x) - \text{делитель } (345+x) \text{ и } (9+x) - \text{делитель } (345+x).$$

Перебором устанавливаем, что $x = 19$.

Ответ: 19.

2. Решите уравнение $(x^2 + 3x + 6)(x^2 + 7x + 16) = 41$.

Решение: Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную "центрирующую" замену:

$$((x+1,5)^2 + 3,75)((x+3,5)^2 + 3,75) = 41. \text{ Замена } x = y - 2,5. \text{ Тогда}$$

$$((y-1)^2 + 3,75)((y+1)^2 + 3,75) = 41 \Leftrightarrow ((y^2 + 4,75) - 2y)((y^2 + 4,75) + 2y) = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 4,75)^2 - 4y^2 = 41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

Ответ: $\frac{-5 \pm \sqrt{-11 + 4\sqrt{26}}}{2}$.

3. Найдите натуральное число n , ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна $2n-1$.

Решение: Сумма делителей числа $n = 2^k$ равна $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1 = 2n - 1$.

Ближайшее число вида $n = 2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

Ответ. 512.

4. На плоскости изображён квадрат $n \times n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3×3 . Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении n и невозможно ни при каком чётном n .

Решение: Если n – нечётное, то, например, возможна укладка “змейкой” по аналогии с рисунком в условии задачи. Если n – чётное, то количество узлов равно $(n+1) \times (n+1)$ – нечётное число. Раскрасим узлы в черный белый цвет так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом одного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но тогда такой маршрут имеет чётную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

5. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число N такое, что десятичная запись числа \sqrt{N} имеет вид: $A,00a_1a_2\dots a_n\dots$, где A – целая часть числа \sqrt{N} , $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – цифры от 0 до 9.

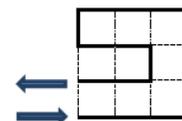
Решение: По условию существует натуральное n такое, что $n^2 < N < (n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное a такое, что $N = n^2 + a$, $a \in (0; 2n+1)$. Далее, $n^2 < n^2 + a < (n+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + a} < \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{n^2 + a} - n < 1$. Следовательно, дробная часть числа \sqrt{N} равна $\sqrt{n^2 + a} - n$. Остается найти минимальное натуральное n , для которого существует натуральное $a \in (0; 2n+1)$ такое, что

$$\sqrt{n^2 + a} - n < \frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2 + a} < \frac{1}{100} + n \Leftrightarrow a < \frac{1}{10^4} + \frac{n}{50}$. Минимальное n равно, очевидно, 50, и тогда $a = 1$. Следовательно, $N = n^2 + a = 2501$.

Ответ: 2501.

6. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с длинами катетов a, b , гипотенузой c и углами α, β (α напротив стороны a , β – напротив b) выполняется равенство $a^2 - 2ac \cos(60^\circ + \beta) = b^2 - 2bc \cos(60^\circ + \alpha)$.



Решение: Преобразуем косинус суммы двух углов:

$$a^2 - ac(\cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta) = b^2 - bc(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ac \sin \beta$ и $\sqrt{3}bc \sin \alpha$ равны друг другу (т.к. оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2 - ac \cos \beta = b^2 - bc \cos \alpha.$$

Последнее очевидно, поскольку $c \cos \beta = a$ и $c \cos \alpha = b$. Равенство доказано.

7. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, \dots$$

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате получим последовательность:

$$9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, \dots$$

Найдите сумму первых 550 членов этой последовательности.

Решение: У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 4950 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть c_9 – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, c_{18} – количество чисел с суммой цифр 18, c_{27} – количество чисел с суммой цифр 27.

Вычислим c_9 . Будем все числа трактовать как четырехзначные: $9=0009$, $18=0018$, ... Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9 = m_1 + m_2 + m_3$. Прибавим к обеим частям число 3: $12 = (m_1 + 1) + (m_2 + 1) + (m_3 + 1)$. Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно C_{11}^2 . (Действительно, представим себе на числовой прямой числа $1, 2, \dots, 12$. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых.) Аналогично, имеется C_{10}^2 чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, C_9^2 чисел $2m_1m_2m_3$, C_8^2 чисел $3m_1m_2m_3$, и, наконец, C_7^2 чисел вида $4m_1m_2m_3$. В итоге, $c_9 = C_{11}^2 + C_{10}^2 + C_9^2 + C_8^2 + C_7^2 = 185$.

Затем нетрудно найти, что $c_{27} = 30$, и, следовательно, $c_{18} = 335$. Для получения ответа остается вычислить $9c_9 + 18c_{18} + 27c_{27}$.

Ответ: 8505.

8. Найдите три каких-нибудь натуральных числа a, b, c , удовлетворяющих равенству $a^3 + b^{2016} = c^5$.

Решение: Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа a, b, c будем искать в виде $a = 2^k, b = 2^l, c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели k, l, m так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

Ответ: Например, $a = 2^{2688}, b = 2^4, c = 2^{1613}$.

