РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАСС

Задача 1

Сгруппируем слагаемые суммы:

$$1 + 2 + \ldots + 2012 + 2013 = (1 + 2013) + (2 + 2012) + \ldots + (1006 + 1008) + 1007 =$$
$$= 2014 + \ldots + 2014 + 1007.$$

Следовательно, убрать нужно число **1007.**

Ответ: 1007.

Задача 2

Сгруппировать слагаемые в левой и правой частях: первое и последнее, второе и предпоследнее и т. д.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{64} + \operatorname{tg}\frac{31\pi}{64} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{64}\cdot\cos\frac{31\pi}{64}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{64}\cdot\sin\frac{\pi}{64}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{32}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{64} + \operatorname{tg}\frac{29\pi}{64} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{64}\cdot\cos\frac{29\pi}{64}} = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{64}\cdot\sin\frac{3\pi}{64}} = \frac{2}{\sin\frac{3\pi}{32}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{32}} + \frac{1}{\sin\frac{31\pi}{32}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{15\pi}{32}}{\sin\frac{\pi}{32}\cdot\sin\frac{31\pi}{32}} = \frac{2\cos\frac{15\pi}{32}}{\sin\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{15\pi}{32}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{32}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{32}} + \frac{1}{\sin\frac{29\pi}{32}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}}{\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\sin\frac{29\pi}{32}} = \frac{2\cos\frac{13\pi}{32}}{\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}} = \frac{2}{\sin\frac{3\pi}{32}}.$$

Теперь нетрудно понять, что доказываемое равенство справедливо.

Задача 3

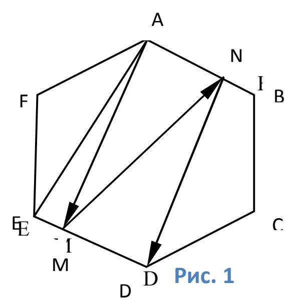


Рис. 1

По формуле $\frac{n-2}{n}180 = \frac{4}{6}180 = 120,$ где $n-$ количество сторон правильного многоугольника, получим величину внутренних углов шестиугольника.

Треугольник AFE – равнобедренный с углом при вершине 120 градусов. Отсюда получим, что $AE = \sqrt{3}ED$

Так как угол падения равен углу отражения, то треугольники AMN и MND равны и AM=MN. Следовательно, AN=MD=2EM, и тогда $tgEAM = \frac{EM}{EA} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Задача 4

Обозначим $a = 10x + y$ - искомое двузначное число (x, y - цифры от 0 до 9). Так как последняя цифра числа a^{2014} равна 1, то последняя цифра y искомогочисла a может принимать значения 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1) $y = 1$. Заметим, что $(10x + 9)^{2014} = A + 2014 * 10x + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014 \cdot 10x$. Откуда $x = 1$ или $x = 6$.
2) $y = 9$. Заметим, что $(10x+9)^{2014} = (10(x+1)-1)^{2014} = A - 2014 \cdot 10(x+1) + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014 \cdot 10(x+1)$. Откуда $x = 3$ или $x = 8$.

Ответ: 11,61, 39, 89.

Задача 5

Преобразуем $\log_2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}(i-j)+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)$.

Тогда для ячеек на диагонали $i = j$ и в них стоит $\log_2 1 = 0$.

Для $i \neq j$ найдем сумму элементов в симметричных относительно диагонали ячейках:

$$\log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right) + \log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(j-i)\right)\right) =$$

$$= \log_2\left(\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)\right) =$$

$$= \log_2\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right) = \log_2\left(\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}(i-j)\right)}{2}\right).$$

Для $(i-j) = 3k$, то есть 3,6,9,12…2013 данная сумма равна нулю.

Для $(i-j) = 3k+1$ то есть 1,4,7,10…2011 данная сумма $\log_2\frac{1}{4} = -2$.

Общее число таких пар ячеек 2013+2010+2007+…+3 $= \frac{2016 \cdot 671}{2} = 676368$.

Для $(i-j)=3k+2$ то есть 2,5,8,11…2012 данная сумма $\log_2 \frac{1}{4}=-2$.

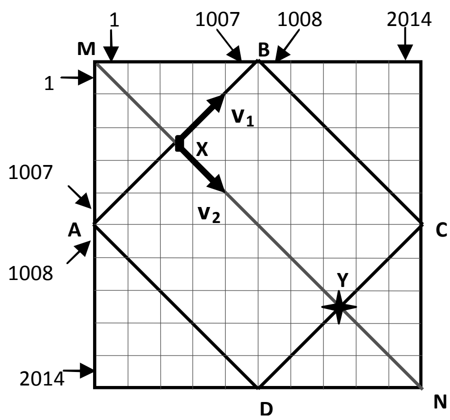
Общее число таких пар ячеек 2012+2009+2006+…+2 $=\frac{2014\cdot 671}{2}=675697$.

Сумма всех чисел в таблице равна $(676368+675697)\cdot(-2)=-2704130$.

Ответ: -2704130

Задача 6

Диагональ квадрата занимает 2014 клеток и равна соответственно 2014 см. Из прямоугольного треугольника с известными катетами находим отрезок $AD = XY = 1007$ см. В силу симметрии получаем, что $MX = YN = \frac{1007}{2}$ см. Следовательно, $AX = XB = CY = YD = \frac{1007}{2}$.



Первая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{\frac{1007}{2}+1007+\frac{1007}{2}+4028\cdot k}{10}=\frac{2014+4028\cdot k}{10}, k=0,1,2,\ldots$$

Вторая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{1007+\left(\frac{1007}{2}+2014+\frac{3}{2}\cdot 1007\right)\cdot n}{13}=\frac{1007+4028\cdot n}{13}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\frac{1007+1007+4028\cdot n}{13}=\frac{2014+4028\cdot n}{13}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

В первом случае, приравнивая времена и упрощая полученное выражение, получим:

$$\frac{2014+4028\cdot k}{10}=\frac{1007+4028\cdot n}{13},$$

$$4 = 10n - 13k.$$

Уравнение имеет решение $n = 3,\ k = 2$.

Во втором случае аналогичным образом получим:

$$\frac{2014+4028\cdot k}{10}=\frac{2014+4028\cdot n}{13},$$

$$3 = 2(13k - 10n).$$

Данное уравнение не имеет решений, т.к. 3 – нечетно.

Очевидно, что для найденной пары $(n,k)=(3,2)$ время встречи и будет минимально. Теперь находим время $t=\frac{2014+4028\cdot 2}{10}= 1007$.

Ответ: 1007 с.

Задача 7

Площадь прямоугольников размера $n\times(n+2)$ вида равна $n^2+2n=(n+1)^2-1$. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 12.

$$0^2=0, 1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, 4^2=4, 5^2=1, 6^2=0, 7^2=1, 8^2=4, 9^2=9$$
$$10^2=4, 11^2=1.$$

Таким образом, площади наших прямоугольников могут при делении на 12 давать остатки 0, 3, 8 и 11. Если площадь одного из прямоугольников дает остаток 0, то вырежем его. Если такового нет, то есть два прямоугольника, площади которых дает одинаковые остатки. Тогда вырежем фигуру букой Г, вырезав из большего такого прямоугольника меньший. Очевидно, что его площадь кратна 12.

Обозначим:

- x- время загрузки одного самосвала;
- k- количество загружавшихся самосвалов;
- S– расстояние между А и В;
- v– скорость порожнего самосвала
- t– время первой встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта А;
- T- время второй встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта А.

Из условий задачи следует, что скорость движения груженой машины равна bv, и тогда верны следующие равенства и неравенства:

- На дорогу из А в А через В Петров потратил $\frac{S}{bv}+\frac{S}{v}$ минут. Прибытие в А Петрова произошло через a минут после первой встречи. Следовательно,
$$\frac{S}{bv}+\frac{S}{v}=t+a$$
- Между двумя встречами прошло $T-t=c$ минут.
- Иванов начал движение из А через $(k-1)x$ минут после Петрова, и, следовательно, до места первой встречи он проехал расстояние $(t-(k-1)x)bv$.

- После второго выезда из А прошло $T-t-a-x=c-a-x$ минут, и Петров успел проехать до места второй встречи расстояние $(c-a-x)bv$. Иванов двигался к А со скоростью v, следовательно,

$$\frac{(c-a-x)bv}{v}=(c-a-x)b\in[d;e].$$

- От места первой встречи до В Иванов на груженом самосвале проехал расстояние $S-(t-(k-1)x)bv$, а от В до места второй встречи на порожнем – расстояние $S-(c-a-x)bv$. Следовательно, $\frac{S-(t-(k-1)x)bv}{bv}+\frac{S-(c-a-x)bv}{v}=c$. Упрощая данное равенство, получаем, что

$$(k-1)x-(c-a-x)b=c-a.$$

Следовательно, мы получаем, что $(k-1)x-(c-a-x)b=c-a$, и при этом $(c-a-x)b\in[d;e]$. Путем несложных преобразований получаем, что верна система

$$\begin{cases}(k-1)x\in[c-a+d,c-a+e],\\ x\in\left[c-a-\dfrac{e}{b};c-a-\dfrac{d}{b}\right],\\ (k-1)x-(c-a-x)b=c-a.\end{cases}$$

В условиях первого варианта (*a=6, b=6/7, c=40, d=16, e=19*) система приобретает вид

$$\begin{cases}(k-1)x\in[50,53],\\ x\in[71/6;92/6],\\ (k-1)x-(34-x)\dfrac{6}{7}=34.\end{cases}$$

Перебором находим, что при x из промежутка $[71/6;92/6]$ выражение $(k-1)x$ может находиться в промежутке от 50 до 53 только при ***k*=5**. Решая оставшееся уравнение, находим, что ***x=13***.

Ответ:время загрузки - 13 , количество загружавшихся самосвалов - 5.