11 класс

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

1. У Олега есть 1000 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы двадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы?

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 20.

1 способ
Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

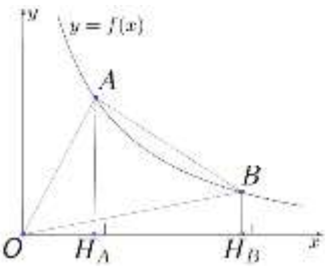
а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 20-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + \cdots + C_{20}^{19} = 2^{19}.$$

2 способ
Рассмотрим 19 цветов 19 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{19} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный двадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{19}.

Ответ: 2^{19}.

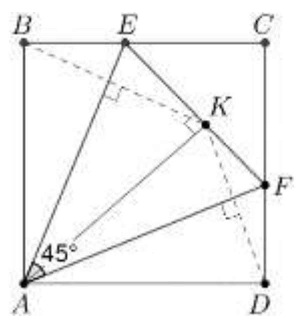
2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF.



Решение: Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся

прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A. Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.
И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.
Ответ: 2.

4. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Решение.
1 способ
Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.
2 способ
Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + \frac{7}{2}ty + 2y^3$. При условии выполнения равенств исходной системы, её корнями будут $t_1 = x^2$ и $t_2 = 2x$. Если $t_1 = t_2$, то $x_1 = 0, x_2 = 2$. Отсюда найдём $y_1 = 0, y_2 = -1$. Если $t_1 \neq t_2$, то используя теорему Виета, получим

$t_1 \cdot t_2 = 2y^3 \Leftrightarrow 2x^3 = 2y^3 \Leftrightarrow x = y$. Подставляя в исходную систему, найдём третье решение $\left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$

Ответ: $(0;0), (2;-1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

6. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения

$$\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$$

Решение: Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{86+41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

7. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение: Замена $t = \cos\varphi$. Уравнение примет вид: $32\cos^5\varphi - 40\cos^3\varphi + 10\cos\varphi = \sqrt{3}$. Преобразуем левую часть:

$$
\begin{aligned}
&2\cos\varphi(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5) = [\text{формулы понижения}] = \\
&= 2\cos\varphi(4(1+\cos 2\varphi)^2 - 10 - 10\cos 2\varphi + 5) = \\
&= 2\cos\varphi(4\cos^2 2\varphi - 2\cos 2\varphi - 1) == 2\cos\varphi(2(1+\cos 4\varphi) - 2\cos 2\varphi - 1) = \\
&= 2\cos\varphi(-4\sin 3\varphi\sin\varphi + 1) = -4\sin 3\varphi\sin 2\varphi + 2\cos\varphi = \\
&= -2(\cos\varphi - \cos 5\varphi) + 2\cos\varphi = 2\cos 5\varphi.
\end{aligned}
$$

Окончательно, $\cos 5\varphi = \sqrt{3}/2$. Отсюда $\varphi = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. Поскольку у первоначального уравнения ровно пять действительных корней (по условию), то, чтоб их предъявить, достаточно взять какие-нибудь пять значений φ, косинусы которых различны. Например, $\varphi \in \{6^0, 78^0, 150^0, 222^0, 294^0\}$.

Ответ: Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos\varphi$, где $\varphi \in \{78^0, 150^0, 222^0, 294^0\}$.

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (То есть множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \dots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}$$

Докажите или опровергните следующие утверждения:
1) и множество A, и множество B содержат конечное число членов;
2) все элементы множеств A и B – целые числа;
3) $\max B \geq 2$.

Решение. 1) верно: если множество A или множество B бесконечно, то и множество C будет бесконечно. Поэтому можем обозначить через a, b, c максимальные элементы этих множеств соответственно и заметить для решения п.3, что $a + b = c$. Отдельно отметим, что такие множества существуют: например, $A = \{0, \dots, a\}$, $B = \{0, \dots, c - a\}$.
2) верно: через разложение по биному доказывается, что a целое. Тогда если бы B содержало нецелые, то и C содержало бы нецелые. Поэтому все элементы множества B целые. Отсюда аналогично получаем, что все элементы множества A целые.
3) утверждение верно.
Заметим, что $2020 = 5 \cdot 404$, $2828 = 7 \cdot 404$, $a < 1 + a_1$, где

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \left((\sqrt{2}+1)^5\right)^{404} = (41 + 29\sqrt{2})^{404} = (82.0\dots)^{404} < 127^{404} = \\
&= 128^{404}(1 - \tfrac{1}{128})^{404} < 2^{7\cdot 404}(1 - \tfrac{1}{128}) < 2^{2828} - 2.
\end{aligned}
$$

Тогда $b = c - a > 2^{2828} - (1 + 2^{2828} - 2) = 1$.