

Вариант 1

1. Найдите все значения a , при которых уравнения $x^2 - 3ax + a + 1 = 0$ и $x^2 - 2ax - a + 1 = 0$ имеют общий корень.

2. Решите неравенство $\frac{x-6}{\sqrt{x+4}-4} \geq 1$.

3. Из пункта А в пункт Б выехала повозка. Через 1 час за ней из А выехал грузовик и догнал повозку, когда та прошла 10 км. Проехав еще 90 км в том же направлении до пункта Б, грузовик развернулся и поехал навстречу повозке. Повторная встреча грузовика и повозки произошла через 5 часов после выезда повозки из пункта А. Определить скорость грузовика.
4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма квадратов первых трех членов в 4 раза больше суммы 1-го, 3-го и 5-го членов. Произведение 2-го и 4-го членов равно $\frac{16}{81}$. Найти все значения, которые может принимать сумма всех членов данной прогрессии.

5. Решите уравнение $\sin(\arccos x) = \frac{1}{2}$.

6. Решите уравнение $(\log_2 |\sin x|)^2 = \log_2 \operatorname{tg}^2 x \cdot \log_2 \cos^2 x + 1$.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса АК. Известно, что $AB=3$, $BK=2$, а высота КН треугольника АКС делит его на два треугольника одинаковой площади. Найдите длину КС.

8. При каких a неравенство

$$x^2 + |x^2 + x + a| > 4$$

верно при всех значениях x ?

РЕШЕНИЕ

1. Найдите все значения a , при которых уравнения $x^2 - 3ax + a + 1 = 0$ и $x^2 - 2ax - a + 1 = 0$ имеют общий корень.

Ответ: $a = 1$.

2. Решите неравенство $\frac{x-6}{\sqrt{x+4}-4} \geq 1$.

Ответ: $x \in [-4; 5] \cup (12; +\infty)$.

3. Из пункта А в пункт Б выехала повозка. Через 1 час за ней из А выехал грузовик и догнал повозку, когда та прошла 10 км. Проехав еще 90 км в том же направлении до пункта Б, грузовик развернулся и поехал навстречу повозке. Повторная встреча грузовика и повозки произошла через 5 часов после выезда повозки из пункта А. Определить скорость грузовика.

РЕШЕНИЕ.

Пусть x, y – скорости грузовика и повозки, соответственно. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{10}{y} - \frac{10}{x} = 1 \\ 200 = 4x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(x-y) = xy \\ y = 40 - \frac{4}{5}x \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{5}x^2 - 22x - 400 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 55x - 1000 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{55 \pm \sqrt{11025}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 40, x_2 = \frac{-50}{4}$$

ОТВЕТ: 40 км/ч

4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма квадратов первых трех членов в 4 раза больше суммы 1-го, 3-го и 5-го членов. Произведение 2-го и 4-го членов равно $\frac{16}{81}$. Найти все значения, которые может принимать сумма всех членов данной прогрессии.

Решение:

Нетрудно понять, что сумма квадратов первых трех членов прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна

$$\frac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2}.$$

В то же время сумма 1-го, 3-го и 5-го членов равна

$$b_1(1+q^2+q^4)=\frac{b_1(1-q^6)}{1-q^2}.$$

Стало быть, $b_1=4$. Остается воспользоваться условием

$$b_2 \cdot b_4 = \frac{16}{81} \Leftrightarrow b_1^2 q^4 = \frac{16}{81} \Leftrightarrow q^4 = \frac{1}{81} \Leftrightarrow q = \pm \frac{1}{3}.$$

Возможные значения суммы S всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии суть

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \begin{cases} 6, q = \frac{1}{3} \\ 3, q = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ответ: 3; 6.

5. Решите уравнение $\sin(\arccos x) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Решите уравнение $(\log_2 |\sin x|)^2 = \log_2 \operatorname{tg}^2 x \cdot \log_2 \cos^2 x + 1$.

Ответ: $\pm \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n, \pm \arcsin(\sqrt{2}-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . Известно, что $AB=3$, $BK=2$, а высота KH треугольника AKC делит его на два треугольника одинаковой площади. Найдите длину KC .

Решение. Очевидно, что KH является также медианой треугольника AKC и $AK=KC$. Обозначим $\angle KCA = \angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle BAC = \angle BAK = 2\alpha$. По теореме синусов

для треугольников ABK и ABC : $\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{BK}{\sin \alpha}$ и $\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BK+KC}{\sin 2\alpha}$. Отсюда находим $KC=2,5$.

Ответ: $KC=2,5$.

8. При каких a неравенство

$$x^2 + |x^2 + x + a| > 4$$

верно при всех значениях x ?

Ответ: $a \in (-\infty; -6) \cup \left(\frac{33}{8}; +\infty\right)$.