Вариант 1

1. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 4 команд, возвращающих робота в исходное положение?

Решение: Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо – П**, **вверх – В**, **вниз – Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть k – количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 2.

- $\boldsymbol{k=0}$. Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 2 местах из 4 должна быть команда **В**, а на оставшихся двух – **Н**. Выбрать 2 места из 4 можно C_4^2 способами. Следовательно, $N_0 = C_4^2 = 6$;
- $\boldsymbol{k=1}$. Каждая из команд **Л,П,В,Н** встречается в последовательности ровно 1 раз. Число перестановок из 4 элементов равно 4!. Поэтому $N_1 = 4! = 24$;
- $\boldsymbol{k=2}$. Здесь две **Л**, две **П** и нет команд **В** и **Н**. Две команды **Л** можно разместить C_4^2 способами. Значит $N_2 = C_4^2 = 6$.

Таким образом, искомое число последовательностей равно $N_0 + N_1 + N_2 = 36$.
Ответ: 36.

2. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите максимум суммы $a + b + c$, где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение: Заметим, что

$$a - b + c = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz,\ B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + {}$ $+4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю.

Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).

2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Итак, возможны 4 варианта: $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.

Ответ: 2

3. Найдите значение $f(2019)$, если известно, что $f(x)$ одновременно удовлетворяет трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$;
3) $f(a+b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение: В тождестве из условия задачи

$$f(a+b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot \big(f(1) + f(0)\big) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

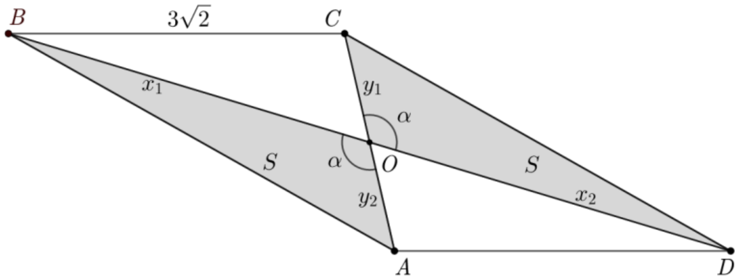
Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$

Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$.
Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$.
Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи. Итак, $f(x) = x$.

Ответ: 2019

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$,
$BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите наименьшую площадь, которую будет иметь такой четырехугольник.



Решение: Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1 y_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}x_2 y_1 \sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Ответ: 6

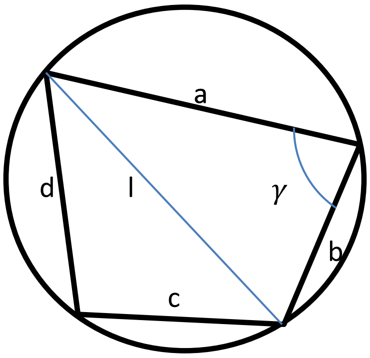
5. Найдите сумму всех простых чисел, десятичная запись которых имеет вид $101010\ldots01$.

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010\ldots101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

Ответ: 101.

6. Известно, что длины сторон выпуклого четырёхугольника равны соответственно $a = 4, b = 5, c = 6, d = 7$. Найти радиус R окружности, описанной вокруг этого четырёхугольника. В качестве ответа привести целую часть R^2.



Решение По теореме косинусов выразим длину диагонали: $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \gamma)$. Отсюда получим $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

Поскольку $R = \frac{l}{2\sin\gamma}$, получаем $R^2 = \frac{l^2}{4(1-\cos^2\gamma)}$.

Для указанных длин сторон получаем $R^2 = \frac{2074799}{131040}$.

Ответ: 15