РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАСС

Задача 1

Нетрудно убедиться в том, что ответом данной задачи является выражение:

$$9^2 - 8^2 = 17.$$

Ответ: $9^2 - 8^2 = 17$.

Задача 2

Поскольку для чисел ряда $1, 2, 3, \dots, 2013$ справедливы равенства:

$$1 + 2013 = 2 + 2012 = \cdots = 1006 + 1008 = 2014,$$

то среди них надо убрать число1007, чтобы сумма оставшихся делилась на 2014.

Ответ: 1007.

Задача 3

Воспользуемся формулой разности квадратов для числа $2014^{2^{2014}} - 1$:

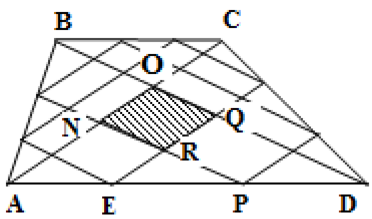
$$2014^{2^{2014}} - 1 = \left(2014^{2^{2013}} - 1\right)\left(2014^{2^{2013}} + 1\right) =$$
$$= \left(2014^{2^{2012}} - 1\right)\left(2014^{2^{2012}} + 1\right)\left(2014^{2^{2013}} + 1\right) = \cdots =$$
$$= (2014 - 1)(2014 + 1) \cdot \ldots \cdot \left(2014^{2^{2013}} + 1\right).$$

Отсюда следует, что число $2014^{2^{2014}} - 1$ больше числа $(2014 + 1) \cdot \ldots \cdot \left(2014^{2^{2013}} + 1\right)$ в 2013 раз.

Ответ: 2013.

Задача 4

Обозначим через $S = S_{ONRQ} -$ площадь заштрихованной фигуры.



По свойствам площадей треугольников с общим углом имеем:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{EQD}} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4},$$

отсюда $S_{EQD}=\frac{4}{9}S_{AOD}$. И, следовательно, $S_{AOQE}=S_{PNOD}=\frac{5}{9}S_{AOD}$. В то же время треугольник ERP подобен треугольнику AOD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, значит $S_{ERP}=\frac{1}{9}S_{AOD}$. Поэтому

$$S_{AOQE}+S_{PNOD}+S_{ERP}-S=S_{AOD},$$

$$\frac{5}{9}S_{AOD}+\frac{5}{9}S_{AOD}-\frac{1}{9}S_{AOD}-S=S_{AOD},$$

и $S=\frac{2}{9}S_{AOD}$.

При этом, $S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}(h_1+h_2)$, где h_1- высота треугольника BOC и h_2- высота треугольника AOD. Ясно, что $h_1=\frac{1}{2}h_2$ в силу подобия треугольников BOC и AOD с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно:

$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}(h_1+h_2)=\frac{3\cdot AD}{4}\cdot\frac{3}{2}h_2=1,$$

откуда $AD\cdot h_2=\frac{8}{9}$. И в итоге:

$$S=\frac{2}{9}S_{AOD}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot h_2=\frac{8}{81}.$$

Ответ: $\frac{8}{81}$.

Задача 5

Достаточно заметить, что

$$a_{i,j}+a_{2015-i,2015-j}=(-1)^i(2015-i-j)^2+$$
$$+(-1)^{2015-i}\big(2015-(2015-i)-(2015-j)\big)^2=$$
$$=(-1)^i(2015-i-j)^2+(-1)^{2015-i}(2015-i-j)^2=0,$$

поскольку i и $2015-i$ имеют разные четности. Следовательно, сумма всех элементов в таблице равна нулю.

Ответ: 0.

Задача 6

Обозначим через $10x+y-$ искомое двузначное число ($x,y-$цифры от 0 до 9). Очевидно, что последняя цифра y искомогочисла равна 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1. $y=1$. Заметим, что $(10x+1)^{2014}=\underbrace{(10x+1)\cdot\ldots\cdot(10x+1)}_{2014}=A+$ $+2014\cdot 10x+1$ и при этом число A делится нацело на 100.

Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014 \cdot 10x$. Откуда $x = 1$ или $x = 6$.

2. $y = 9$. Заметим, что $(10x+9)^{2014} = (10(x+1)-1)^{2014} = \underbrace{(10(x+1)-1)^{2014} \cdot \ldots \cdot (10(x+1)-1)^{2014}}_{2014} = A - 2014 \cdot 10(x+1) + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014 \cdot 10(x+1)$. Откуда $x = 3$ или $x = 8$.

Суммируя полученное, приходим к ответу.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

Задача 7

Пусть r_1 иr_2 – концентрации 1-го и 2-го растворов соответственно. После первого переливания концентрация 1-го станет $r_1' = \frac{r_1+r_2}{2}$, а после второго переливания концентрация 2-го станет $r_2' = \frac{\frac{r_1+r_2}{2}+r_2}{2} = \frac{r_1+3r_2}{4}$. Тогда $r_2' - r_1' = \frac{r_2-r_1}{4}$. Следовательно, через n действий разность концентраций станет равна $\frac{r_2-r_1}{4^n} = \frac{0{,}6-0{,}1}{4^n} = \frac{1}{2\cdot 4^n}$. Отсюда наименьшим решением неравенства $\frac{1}{2\cdot 4^n} < \frac{1}{1000}$ является $n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 8

Площадь квадратов равна n^2. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 8:

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 1, 4^2 = 0, 5^2 = 1, 6^2 = 4, 7^2 = 1$$

Таким образом, площади наших квадратов могут при делении на 8 давать остатки 0, 1 и 4. Если площадь одного из квадратов дает остаток 0, то вырежем его – это искомая фигура. Если такового нет, то есть два квадрата, площади которых дают одинаковые остатки. Тогда, вырезав из большего квадрата меньший, получим фигуру буквой «Г», площадь которой кратна 8.