Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2018-2019 учебном году
9 класс
Вариант 1

Задача 1. (15 баллов). Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$mg = 2 * 2\pi r\alpha\,.$

Отсюда получаем ответ.

Итого: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} = 1.4\,мм\,.$

Задача 2. (15 баллов). Два одинаковых проводящих шарика несут заряды разного знака. Соотношение величин зарядов равно k. Шарики были приведены в соприкосновение и снова удалены на прежнее расстояние. Во сколько раз n сила взаимодействия шаров до соприкосновения больше силы их взаимодействия после соприкосновения?

Решение:

Величина сил взаимодействия шаров до соприкосновения и после соприкосновения равны соответственно

$$F_{до\,сопр.} = ¿\, Q_1 Q_2 \vee \frac{¿}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\, ¿ \quad \text{и} \quad F_{после\,сопр.} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}.$$

Отсюда $n = \frac{F_{до\,сопр.}}{F_{после\,сопр.}} = ¿\, Q_1 Q_2 \vee \frac{¿}{q_1 q_2}.¿$

Согласно закону сохранения электрического заряда алгебраическая сумма зарядов в системе заряженных шариков останется прежней (до и после их соприкосновения):

$Q_1 + Q_2.$

Из-за одинаковости размеров шариков каждый из них (после соприкосновения) получит одинаковый по величине и по знаку заряд

$$q = q_1 ¿\, q_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}.$$

Если больший по величине заряд был положительным, заряды $q_1 u q_2$ будут положительными. Если больший по величине заряд был отрицательным, заряды $q_1 u q_2$ будут отрицательными. Изменится характер взаимодействия шариков: притяжение сменится отталкиванием. Тогда

$$n=\frac{F_{до\,сопр.}}{F_{после\,сопр.}}=¿Q_1Q_2\vee\frac{¿}{q_1q_2}=¿Q_1Q_2\vee\frac{¿}{q_1q_2}=4¿Q_1Q_2\vee\frac{¿}{(Q_1+Q_2)^2}.¿¿¿$$

Соотношение величин зарядов равно k. Пусть, к примеру, $Q_1=-kQ_2$. Знак «минус» отражает разноименность начальных зарядов. Тогда получаем окончательный ответ.

Итого: $n=\frac{F_{до\,сопр.}}{F_{после\,сопр.}}=\frac{4k}{(k-1)^2}$.

Легко убедиться, что выбор $Q_2=-kQ_1$ приводит к тому же ответу.

Ответ теряет смысл при k = 1. Это имеет четкий физический смысл. Если k = 1 ($Q_1=-Q_2$), то после соприкосновения шаров, они (шары) будут полностью разряжены, и их сила взаимодействия будет равна нулю.

Задача 3. (15 баллов). Железный стержень длины L = 1,5 м при продольной нагрузке P = 5000 Н не должен удлиняться более, чем ΔL = 0,3 мм. Какого сечения S надо взять этот стержень? Модуль Юнга железа $E = 19{,}6\cdot10^9$ Н/м^2.

Решение:

Из закона Гука:

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{P}{ES}$$

Определим сечение стержня $S=\frac{PL}{E\Delta L}=¿\ 128\ мм^2$.

Задача 4. (25 баллов). Однородный тонкий обруч массой m и радиуса R скатывается без скольжения с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность. На какую высоту h подпрыгнет обруч после удара о горизонтальную поверхность, если он скатился с высоты H? Угол наклона плоскости к горизонту равен α.

Решение:

Пусть в какой-то произвольный момент времени у катящегося без проскальзывания обруча скорость любой точки его геометрической оси равна v. Любая точка обода участвует в двух движениях: вращательное движение (со скоростью равной v) вокруг оси плюс поступательное движение (со скоростью равной v) вместе с любой точкой его геометрической оси. Как следствие вышесказанного, кинетическая энергия обруча (как целого) складывается из кинетической энергии чисто вращательного движения обруча вокруг его геометрической оси (его центра масс) плюс кинетической энергии поступательного движения его центра масс:

$$E_{кин.}=E_{кин.вр.}+E_{кин.ц.м.}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mv^2.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча при его скатывании (без скольжения) с высоты H:

$$mgH=mv^2.$$

Отсюда находим скорость оси обода (или, что то же самое, скорость его центра масс) в конце пути вдоль наклонной плоскости:

$$v=\sqrt{gH}.$$

Вектор этой скорости направлен вдоль наклонной плоскости в момент предшествующий удару обруча о горизонтальную плоскость. Вертикальная составляющая $v_{вер.}$ этой скорости равна:

$$v_{вер.}=\sqrt{gH}\,sin\alpha\,.$$

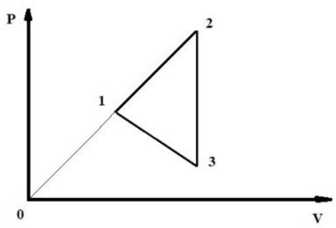
При ударе обруча о горизонтальную плоскость горизонтальная составляющая скорости его оси (центра масс) и скорость вращения точек обруча относительно его оси (его центра масс) не изменятся. Вертикальная составляющая скорости его оси (центра масс) меняет свое направление на противоположное. Это изменение вертикальной составляющей скорости центра масс обруча и определяет высоту подскока обруча (его центра масс) после удара о горизонтальную поверхность. Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча для описания его «полета» от момента удара о горизонтальную поверхность до достижения обручем максимальной высоты h:

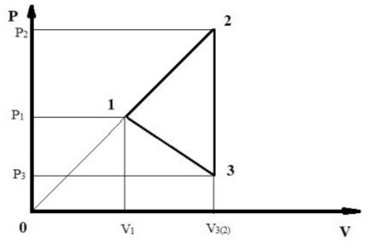
$$\frac{m\,v_{вер.}^2}{2}=mgh\,.$$

С учетом ранее найденной $v_{вер.}$ получаем ответ.

Итого: $h=\frac{H}{2}\sin^2\alpha\,.$

Задача 5. (30 баллов). Найдите работу A, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле (1⟼2⟼3⟼1), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.





Решение:

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, численно равна площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе (1⟼2, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе (3⟼1, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\mapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла (1⟼2) равна

$$A_{1\mapsto 2}=\frac{1}{2}\left[P_1+P_2\right]\left[V_{3(2)}-V_1\right]. \quad (1)$$

Работа $A_{3\mapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла (3⟼1) равна

$$A_{3\mapsto 1}=\frac{-1}{2}\left[P_1+P_3\right]\left[V_{3(2)}-V_1\right]. \quad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\mapsto 2}$ и $A_{3\mapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\mapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла (2⟼3) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\mapsto 2} + A_{3\mapsto 1} = \frac{1}{2}\left[P_1 + P_2\right]\left[V_{3(2)} - V_1\right] - \frac{1}{2}\left[P_1 + P_3\right]\left[V_{3(2)} - V_1\right]. \tag{3}$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \tag{4}$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$A = \frac{1}{2}\left[RT_2 - RT_1\right] + \frac{1}{2}\left[P_3 - P_2\right]\left[V_1\right] = \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{2}\left[RT_2 - RT_1\right] + \frac{1}{2}\left[P_3/P_1 - P_2/P_1\right]\left[P_1 V_1\right] = \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{2}\left[RT_2 - RT_1\right] + \frac{1}{2}\left[P_3/P_1 - P_2/P_1\right]\left[RT_1\right]. \tag{5}$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» $(0,2,V_{3(2)})$ и $(0,1,V_1)$ можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\ . \tag{6}$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1 V_1 = P_3 V_{3(2)} \tag{7}$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2 P_3}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \tag{8}$$

Из изохоры (2⟼3) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \tag{9}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \tag{10}$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \tag{11}$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

Итого:
$$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$