Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2020-2021 учебном году
9 класс
Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (15 баллов). Автомобиль массой m=2,5 т движется с постоянной скоростью v=54 км/ч по вогнутому мосту с радиусом кривизны R=90 м. С какой силой F автомобиль давит на мост, проезжая его середину? Считать g =9,8 м/с^2.

Решение:

На автомобиль в нижней точке вогнутого моста действуют две силы: направленная вертикально вниз сила тяжести mg, и направленная вертикально вверх сила реакции опоры (моста) N. Результирующая этих двух сил направлена к центру кривизны моста (вертикально вверх), называется центростремительной силой, и равна произведению массы автомобиля m на его центростремительное ускорение v^2/R:

$$N - mg = m\frac{v^2}{R}.$$

По третьему закону Ньютона F = N.

Следовательно

$$F = N = mg + m\frac{v^2}{R}.$$

Ответ: $F = m\,(g + \frac{v^2}{R}) = 30750\text{н}.$

Задача 2. (15 баллов). Плавая в жидкости с неизвестной плотностью, кубическое тело погружается на глубину h_1. Плавая в жидкости с другой неизвестной плотностью, это же тело погружается на глубину h_2. Какова будет глубина H погружения этого тела в жидкости с плотностью, равной средней арифметической плотностей первых двух жидкостей [$\rho=(\rho_1+\rho_2)/2$]? Грани погруженного тела в форме куба либо параллельны, либо перпендикулярны поверхностям жидкостей.

Решение:

Условие равновесия плавающего тела в каждой из жидкостей записывается следующим образом (S – площадь грани куба):

$$mg = \rho_1 g V_1 = \rho_1 g h_1 S$$
$$mg = \rho_2 g V_2 = \rho_2 g h_2 S$$
$$mg = \rho g V = \rho g H S,$$

где S – площадь боковой грани куба.

Выразим сумму плотностей ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)$$

Подставим результат в третье исходное уравнение:

$$mg = \frac{m}{2S}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) gHS,$$

Следовательно

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)$$

или

Ответ: $H = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$

Задача 3. (20 баллов). Симметричную гранату бросили со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В верхней точке траектории граната разорвалась на множество одинаковых осколков. Какую скорость u имеет сразу после взрыва тот осколок, который первым упадет на землю? Максимальная скорость осколков после взрыва v_1.

Решение:

В верхней точке траектории (до момента взрыва) граната имеет горизонтальную скорость $v_{гор} = v_0 \cos\alpha$ в лабораторной системе отсчета (ЛСО), связанной с поверхностью земли. В подвижной системе отсчета (ПСО), связанной с центром масс гранаты, в момент взрыва гранаты, все одинаковые (по условию задачи) осколки будут иметь скорость v^*.

Максимальной (в ЛСО) будет скорость того осколка, у которого скорость v^* будет совпадать по направлению с $v_{гор}$.

Тогда, по условию задачи:

$$v_1 = v_0 \cos\alpha + v^*.$$

Отсюда находим:

$$v^* = v_1 - v_0 \cos\alpha.$$

Из физических соображений понятно, что первым упадет на землю тот осколок, у которого скорость v^* направлена вертикально вниз. Это означает, что искомая (в ЛСО) скорость u будет равна геометрической сумме взаимно перпендикулярных по направлениям скоростей: $v_{гор} = v_0 \cos\alpha$ и $v^* = v_1 - v_0 \cos\alpha$.

Для нахождения u применяем теорему Пифагора и получаем ответ.

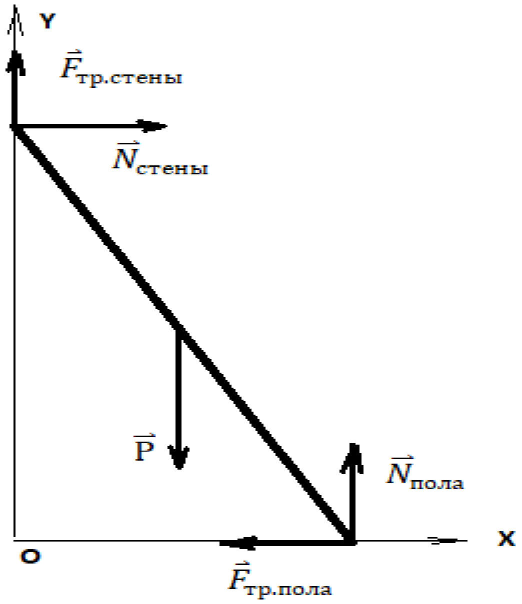
Ответ:

$$u = \sqrt{v_1^2 - 2v_1v_0\cos\alpha + 2v_0^2cos^2\alpha}$$

Задача 4. (20 баллов). Однородный щит, имеющий форму прямоугольника, стоит на горизонтальном полу прислоненным к стене. Коэффициенты трения скольжения щита о пол $k_п$ и стену $k_с$ известны. При каком минимальном угле наклона α щита к полу щит не будет скользить по полу?

Решение:

Сделаем рисунок к задаче, и обозначим на нем все силы, действующие на щит.



Обозначения сил и их физический смысл понятны. Вес щита P (из-за его однородности) приложен к его середине.

Запишем условие равновесия сил, действующих на щит, в проекциях на горизонтальную (X) и вертикальную (Y) оси:

$$\mathrm{N}_{\text{стены}} = \mathrm{F}_{\text{тр. пол.}},$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}_{\text{пол.}} + \mathrm{F}_{\text{тр. стены}}.$$

С учетом хорошо известных соотношений:

$$\mathrm{F}_{\text{тр.пол.}} = \mathrm{k}_{\text{пол.}}\ \mathrm{N}_{\text{пол.}},$$

$$\mathrm{F}_{\text{тр. стены}} = \mathrm{k}_{\text{стены}}\ \mathrm{N}_{\text{стены}},$$

условия равновесия сил примут вид:

$$\mathrm{N}_{\text{стены}} = \mathrm{k}_{\text{пол.}}\ \mathrm{N}_{\text{пол.}},$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}_{\text{пол.}} + \mathrm{k}_{\text{стены}}\ \mathrm{N}_{\text{стены}} = \mathrm{N}_{\text{пол.}} + \mathrm{k}_{\text{стены}}\,\mathrm{k}_{\text{пол.}}\ \mathrm{N}_{\text{пол.}} = \mathrm{N}_{\text{пол.}}(1 + \mathrm{k}_{\text{стены}}\,\mathrm{k}_{\text{пол.}}).$$

Окончательно из условий равновесия сил получаем:

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}_{\text{пол.}}(1 + \mathrm{k}_{\text{стены}}\,\mathrm{k}_{\text{пол.}}).$$

Запишем условие равновесия моментов сил, действующих на щит, относительно точки касания лестницей пола:

$$P\frac{L}{2}\cos\alpha = \mathrm{N}_{\text{стены}} L\sin\alpha + \mathrm{F}_{\text{тр. стены}} L\ \cos\alpha.$$

После подстановки в последнюю формулу $F_{\text{тр. стены}}$ и ранее найденной P получим:

$$k_{\text{стены}}\, k_{\text{пол.}} + 2\, tg\, \alpha\, k_{\text{пол.}} = 1.$$

Отсюда следует ответ.

Ответ: $tg\, \alpha = \frac{1 - k_{\text{п}} k_{\text{с}}}{2\, k_{\text{п}}}$. при $k_{\text{п}} = 0$ равновесие возможно лишь при $\alpha=\pi/2$.

Задача 5. (30 баллов). В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде длины L находятся n подвижных, физически бесконечно тонких, теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на n+1 отсек. Первоначально объемы всех отсеков одинаковы, температура газов во всех отсеках равна T0. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T (T>T0). При этом в других отсеках поддерживают прежнюю температуру T0. На какое расстояние ΔL сместится самый правый поршень?

Решение:

Начальное состояние газа во всем цилиндрическом сосуде описывается уравнением состояния:

$$P_0 V_{\text{цил.}} = \nu\, RT_0.$$

Число молей газа в каждом отсеке ν_1 до и после нагревания самого левого отсека одинаково и равно:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{n+1}.$$

Тогда число молей в самом левом отсеке $\nu_{\text{л}}$ и во всех остальных (правых) отсеках $\nu_{\text{прав.}}$ соответственно равны:

$$\nu_{\text{лев.}} = \nu_1 = \frac{\nu}{n+1}.$$

$$\nu_{\text{прав.}} = n\nu_1 = \frac{n\,\nu}{n+1}.$$

Запишем уравнение состояния газов в самом левом и во всех правых отсеках соответственно после нагревания самого левого отсека:

$$P\, V_{\text{лев}} = \frac{\nu}{n+1}\, RT,$$

$$P\, V_{\text{прав.}} = \frac{n\,\nu}{n+1}\, RT_0,$$

Поделив друг на друга последние выражения, получим отношение объемов, которые занимают нагретый газ в самом левом отсеке и газ во всех остальных (правых отсеках):

$$\frac{V_{\text{лев.}}}{V_{\text{прав.}}} = \frac{T}{n\, T_0}.$$

При этом должно выполняться равенство (условие постоянства объема всего цилиндрического сосуда длины L):

$$V_{\text{лев.}} + V_{\text{прав.}} = V_{\text{цил.}}$$

Из последних двух выражений находим:

$$V_{\text{лев.}} = V_{\text{цил.}} \frac{T}{T + nT_0}$$
$$V_{\text{прав.}} = V_{\text{цил.}} \frac{nT_0}{T + nT_0}.$$

Из последнего выражения найдем объем, приходящийся на каждый правый отсек:

$$V_{1,\text{прав.}} = V_{\text{цил.}} \frac{T_0}{T + nT_0}.$$

До нагревания самого левого отсека, на каждый отсек приходился объем

$$V_{\text{нач.}} = \frac{V_{\text{цил.}}}{n + 1}.$$

Тогда, чтобы найти расстояние ΔL (на которое сместится самый правый поршень) после нагревания самого левого отсека, надо из последнего выражения вычесть предпоследнее выражение, и результат поделить на площадь сечения цилиндрического сосуда S

$$\Delta L = \frac{1}{S}\left[\frac{V_{\text{цил.}}}{n + 1} - V_{\text{цил.}} \frac{T_0}{T + nT_0}\right]$$

Проведя простые преобразования (с учетом естественного соотношения $V_{\text{цил.}} = S\ L$), получим ответ.

Ответ: $\boldsymbol{\Delta L = L \frac{T - T_0}{(n+1)(T + nT_0)}}$