Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2020-2021 учебном году

11 класс

Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Заряженная частица массой 1 мг находится в вакууме в электрическом поле неподвижного равномерно заряженного шара. Частицу удерживают в состоянии покоя на некотором расстоянии от центра шара, действуя на нее силой 1 мН. Затем частицу отпускают, и она начинает двигаться. Пройдя от исходного положения расстояние 1 м, частица приобретает скорость 1 м/с. Каково ускорение частицы в этот момент времени? Частица и шар заряжены одноименно.

Решение:

Обозначим q-заряд частицы, Q - заряд шара, r – начальное расстояние между частицей и центром шара, s- расстояние которое прошла частица от исходного положения. По закону Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r+s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQs}{r(r+s)} = F\frac{sr}{r+s}$$

По второму закону Ньютона $ma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(r+s)^2} = F\left(\frac{r}{r+s}\right)^2$.

Объединяя записанные выражения получим:

<u>Ответ:</u> $a = \frac{mv^4}{4Fs^2} = 0{,}25$ м/с2.

Задача 2. (20 баллов). В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде длины L находятся n подвижных, физически бесконечно тонких, теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на n+1 отсек. Первоначально объемы всех отсеков одинаковы, температура газов во всех отсеках равна T0. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T (T>T0). При этом в других отсеках поддерживают прежнюю температуру T0. На какое расстояние ΔL сместится самый правый поршень?

Решение:

Начальное состояние газа во всем цилиндрическом сосуде описывается уравнением состояния:

$$P_0V_{цил.} = \nu RT_0.$$

Число молей газа в каждом отсеке ν_1 до и после нагревания <u>самого левого</u> отсека одинаково и равно:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{n+1}.$$

Тогда число молей в самом левом отсеке $\nu_л$ и во всех остальных (правых) отсеках $\nu_{прав.}$ соответственно равны:

$$\nu_{лев.} = \nu_1 = \frac{\nu}{n+1}.$$

$$\nu_{прав.} = n\nu_1 = \frac{n\,\nu}{n+1}.$$

Запишем уравнение состояния газов в самом левом и во всех правых отсеках соответственно после нагревания самого левого отсека:

$$P\,V_{лев} = \frac{\nu}{n+1}\,RT,$$

$$P\,V_{прав.} = \frac{n\,\nu}{n+1}\,RT_0,$$

Поделив друг на друга последние выражения, получим отношение объемов, которые занимают нагретый газ в самом левом отсеке и газ во всех остальных (правых отсеках):

$$\frac{V_{лев.}}{V_{прав.}} = \frac{T}{n\,T_0}.$$

При этом должно выполняться равенство (условие постоянства объема всего цилиндрического сосуда длины L):

$$V_{лев.} + V_{прав.} = \mathrm{V}_{цил.}$$

Из последних двух выражений находим:

$$V_{лев.} = V_{цил.}\frac{T}{T+nT_0}$$

$$V_{прав.} = V_{цил.}\frac{nT_0}{T+nT_0}.$$

Из последнего выражения найдем объем, приходящийся на каждый правый отсек:

$$V_{1,прав.} = V_{цил.}\frac{T_0}{T+nT_0}.$$

До нагревания самого левого отсека, на каждый отсек приходился объем

$$V_{нач.} = \frac{V_{цил.}}{n+1}.$$

Тогда, чтобы найти расстояние ΔL (на которое сместится самый правый поршень) после нагревания самого левого отсека, надо из последнего выражения вычесть предпоследнее выражение, и результат поделить на площадь сечения цилиндрического сосуда S

$$\Delta L = \frac{1}{S}\left[\frac{V_{цил.}}{n+1} - V_{цил.}\frac{T_0}{T+nT_0}\right]$$

Проведя простые преобразования (с учетом естественного соотношения $V_{цил.} = S\,L$), получим ответ.

Ответ: $\boldsymbol{\Delta L = L\frac{T-T_0}{(n+1)(T+nT_0)}}$

Задача 3. (20 баллов). Центральная часть Земли – ядро – состоит из железа. Внутренняя часть ядра радиусом R твердая, а внешняя часть расплавлена. Ядро медленно остывает. Оценить, на сколько ΔR метров изменится радиус твердой части при остывании ядра на $|\Delta T|$ кельвинов. Удельная теплота плавления железа q, начальная температура ядра T, при затвердевании плотность железа увеличивается на величину $\Delta\rho$, малую по сравнению с самой плотностью. С увеличением давления температура плавления железа возрастает согласно уравнению $\mathrm{dp/dT = q/(T\Delta V)}$, где ΔV – приращение удельного объема при плавлении, dp и dT – приращение давления и температуры соответственно.

Решение:

Распределение давления внутри ядра:

$$dp/dR = -\rho\cdot G(4/3)\pi R^3\rho/R^2 = -4\pi G\rho^2R/3, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная.

Связь давления с температурой плавления железа:

$$dp/dT = q/(T\Delta V) = \rho^2q/(T\Delta\rho). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим:

$$dR/dT = -3q/(4\pi GRT\Delta\rho),$$
$$\Delta R \approx -3q\Delta T/(4\pi GRT\Delta\rho),$$

или

$$\Delta R = 3q|\Delta T|/(4\pi GRT\Delta\rho),$$

где $|\Delta T|$ – модуль приращения температуры ΔT.

<u>Ответ:</u> $\Delta R = 3q|\Delta T|/(4\pi GRT\Delta\rho)$.

Задача 4. (20 баллов). На жестко закрепленной цилиндрической серебряной струне массой $\boldsymbol{m}$**,** длиной $\boldsymbol{l}$и площадью поперечного сечения $\boldsymbol{S}$ при температуре $\boldsymbol{T=0^oC}$ возбуждают стоячую волну с максимальной длиной волны. Сила натяжения струны равна $\boldsymbol{N}$, коэффициент жесткости - $\boldsymbol{k}$,коэффициент линейного расширения –$\boldsymbol{\alpha}$, удельное сопротивление - $\boldsymbol{\rho}$, удельная теплоемкость - $\boldsymbol{C}$. Скорость волны принять равной $\boldsymbol{V=\sqrt{\frac{N}{\lambda}}}$, где $\boldsymbol{\lambda}$– линейная плотность струны. Через струну пропускают постоянный электрический ток $\boldsymbol{I}$. Объемным расширением, теплоотдачей и зависимостью сопротивления от температуры пренебречь. Найти частоту колебаний $\boldsymbol{f}$через время $\boldsymbol{t}$**.**

Решение.

Постоянный ток нагревает струну. При этом изменяется ее длина, линейная плотность и сила натяжения. Частоту колебаний струны можно выразить через скорость и длину волны:

$$\boldsymbol{f=\sqrt{\frac{Pb}{m}}\frac{1}{2l}=\sqrt{\frac{Pb}{4ml^2}},}$$

где $\boldsymbol{P}$ - сила натяжения струны, $\boldsymbol{b}$ – длина струны через время $\boldsymbol{t}$.

$$b=l(1+\alpha T)$$

Пусть длина струны до натяжения равна $\boldsymbol{d}$.

$$N=k(d-l)$$

$$P=k(d-b)=N-k\alpha Tl$$

Температура струны увеличивается со временем

$$Q=I^2Rt$$

$$Q=CmT$$

$$R=\rho\frac{l}{S}$$

$$T=\frac{I^2\rho lt}{SCm}$$

Подставим полученные зависимости в выражение для частоты

<u>Ответ:</u> $$f=\sqrt{\frac{(N-k\,\alpha\,Tl)l(1+\alpha T)}{4ml^2}}=\sqrt{\frac{(NSCm-k\alpha I^2l^2\rho t)(SCm+\alpha I^2l\rho t)}{4m^3lS^2C^2}}$$

Задача 5. (20 баллов). Известно, что капля жидкости в невесомости принимает сферическую форму, обусловленную собственным поверхностным натяжением, величина которого определяется коэффициентом поверхностного натяжения σ. В этом случае на единицу поверхности капли радиуса R действует сила $P_L=2\sigma/R$ (лапласовское давление), направленная внутрь поверхности и перпендикулярная ей. Пусть теперь на каплю поместили заряд q, равномерно распределенный по ее поверхности. Найти величину q, при которой капля может потерять сферическую форму. Величины σ и R известны. Используя полученное выражение для q, рассчитать q при σ=0.073 н/м и R=1 см.

Решение:

Если на поверхность капли поместить равномерно распределенный заряд, то за счет того, что элементарные одноименные заряды отталкиваются и будут стремиться удалиться друг от друга, т.е. растянуть каплю, будет возникать сила отрицательного давления $P_э$ на ее поверхность. Эта сила направлена наружу по отношению к поверхности капли и перпендикулярна ей.

Найдем силу давления $P_э$ из условия, что работа $A_э$ этой силы равна изменению энергии ΔW при расширении заряженной сферы, то есть изменении ее радиуса на малую величину Δr.

$$\Delta W=W_1-W_2=A_э,$$

где W_1 – энергия электрического поля при радиусе заряженной сферы равном r, а W_2 – энергия электрического поля при радиусе заряженной сферы равном r+Δr, где Δr<< r. При выполнении условия малости Δr изменением плотности заряда при расширении сферы можно пренебречь.

Найдем работу из условия, что энергия электрического поля сферы ΔW, заключенная в тонком слое Δr, равна

$$A_э = \Delta W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V,$$

где $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ - плотность энергии электростатического поля у поверхности сферы (внутри сферы поле равно нулю), ΔV - изменение объема при ее расширении.

С другой стороны, работа силы давления $P_э$ равна:

$$A_э = P_э \Delta V$$

Приравнивая выражения, получим:

$$P_э = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

где $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, тогда

$$P_э = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

Сферическая форма капли может нарушиться, когда лапласовское давление будет скомпенсировано отрицательным давлением из-за электрического заряда:

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}, \text{ отсюда } q = 8\pi R\sqrt{\sigma\varepsilon_0 R}$$

<u>Ответ:</u> q=20 нКл