11 класс XXIX Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии

1 вариант

1. Известно, что p, p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, и $p^3 - 2p^2 - 16p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - 32$. Найдите все такие числа p, p_1, p_2, p_3. Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть $p_1 < p_2 < p_3$. По условию $p^3 - 2p^2 - 16p + 32 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$. Разложим левую часть на множители:

$$(p-2)(p-4)(p+4) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \qquad (1)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $p \neq 2,3,5$. Значит $p > 5$. Следовательно, числа в левой части (1) различны и отличны от 1. Поэтому $p - 4 = p_1$, $p - 2 = p_2$, $p + 4 = p_3$. Поскольку p на 3 не делится, возможны случаи:

- число p при делении на 3 дает остаток 1. Тогда на 3 делится число $p - 4$. Такое возможно только, когда $p - 4 = 3$, так как число $p - 4$ простое. Отсюда $p = 7$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 11$.
- число p при делении на 3 дает остаток 2. Тогда на 3 делится $p + 4$. Значит $p + 4 = 3$, что невозможно.

Ответ: $p = 7$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 11$ (при условии $p_1 < p_2 < p_3$).

2. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирают натуральные числа x_0 и k. Далее число x_0 приписывают в начало последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$, а число $x_{n+1} = x_0 + 19^{n+4}$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ по формуле $y_i = r_{32}(x_i + 6x_i \cdot k^3 + k)$, $i = 0,1,\dots,n+1$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ заменяют буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **КЙЫЦНБНЦЛ**. Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Решение: Нетрудно понять, что длина слова $n = 7$, а также несложно найти остаток

$r_{32}(19^{11}) = 11$.

Преобразуем зашифрованный текст в последовательность чисел:

$$y_0 = 10,\ y_1 = 9,\ y_2 = 27,\ y_3 = 22,\ y_4 = 13,\ y_5 = 1,\ y_6 = 13,\ y_7 = 22,\ y_8 = 11.$$

Из условия следует, что $x_8 - x_0 = 11$. Рассмотрим разность $r_{32}(y_8 - y_0) = r_{32}(x_8 + 6x_8 \cdot k^3 + k - x_0 - 6x_0 \cdot k^3 - k) = = r_{32}((1 + 6k^3) \cdot (x_8 - x_0)) = r_{32}(11 \cdot (1 + 6k^3))$.

Имеем:

$$r_{32}(11 \cdot (1 + 6k^3)) = 1.$$

Заметим, что $r_{32}(3 \cdot 11) = 1$. Откуда находим $r_{32}(1 + 6k^3) = 3$. Значит,

$$1 + 6k^3 = 3 + 32t \Leftrightarrow 3k^3 = 1 + 16t \Leftrightarrow 33k^3 = 11 + 11 \cdot 16t$$

Значит, $r_{16}(33k^3) = r_{16}(k^3) = 11$. В итоге

$$k^3 = 11 + 16p.$$

При $p = 1$ получим $k^3 = 27$. Отсюда $k = 3$. Опробуем полученное значение.

Согласно правилу зашифрования

$$y_1 = 9 = r_{32}(x_1 + 6x_1 \cdot 27 + 3) = r_{32}(x_1 \cdot 3 + 3),$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 + 3 = 9 + 32t \Leftrightarrow 3x_1 = 6 + 32t$$
Т.е. $r_{32}(3x_1) = 6 \Longrightarrow r_{32}(x_1) = 2$. Продолжая дальше получим:
$$y_2 = 27 = r_{32}(x_2 + 6x_2 \cdot 27 + 3) = r_{32}(x_2 \cdot 3 + 3),$$
$$\Leftrightarrow 3x_2 + 3 = 27 + 32t \Leftrightarrow 3x_2 = 24 + 32t$$
Т.е. $r_{32}(3x_2) = 24 \Longrightarrow r_{32}(x_2) = 8$. В итоге получим

Ответ: ВИСОКОС.

3. Каждому из четырех абонентов A_1, A_2, A_3, A_4 надо выдать по два уравнения вида $aw + bx + cy + +dz = t$, где $a, b, c, d, t, w, x, y, z \in \{0,1\}$. Значения секретных битов w, x, y, z одинаковы для всех абонентов и им заранее неизвестны. Приведите хотя бы один пример уравнений, которые надо выдать этим четырем абонентам, чтобы каждая пара $\{A_1, A_3\}$, $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_3\}$ могла достоверно вычислить w, x, y, z, но чтобы при этом: 1) ни одна другая пара абонентов не могла бы достоверно вычислить более одного секретного бита; 2) ни один абонент в одиночку не был в состоянии достоверно вычислить даже один секретный бит. Например, если абонент A_1 получит уравнения $\{w + x + y + z = 1;\ w + x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1\}$, а A_2 – $\{w + 0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 0; w + x + 0 \cdot y + +z = 0\}$. Тогда, объединившись, из имеющихся в их распоряжении четырех уравнений они однозначно найдут, что $w = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. При этом будем говорить, что пара абонентов $\{A_1, A_2\}$ может *достоверно вычислить* секретные биты w, x, y, z. Здесь традиционно полагается, что 1+1=0.

Решение: Пусть w_0, x_0, y_0, z_0 – значения секретных битов w, x, y, z. Решим прежде задачу, предполагая, что все секретные биты равны нулю: $w_0 = x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Затем в уравнениях можно будет сделать замену $w \to w + w_0, \dots, z \to z + z_0$ и тем самым получить решение задачи в общем случае.

Запишем теперь какую-нибудь систему из четырех уравнений, которой удовлетворяют *только* нулевые значения. Например,

$$w + x = 0 \quad (1) \qquad y + z = 0 \quad (3)$$

$$x + y = 0 \quad (2) \qquad w + x + y = 0 \quad (4)$$

Запишем еще одно уравнение, сложив эти четыре:

$$x + y + z = 0 \qquad (5)$$

Система из *любых* четырех уравнений из набора (1) – (5) имеет только нулевое решение. Далее идея в следующем. Если пара абонентов должна уметь находить все биты, то этой паре выдадим четыре *различные* уравнения из набора (1) – (5), если же нет, то хоть одно уравнение у этой пары должно быть общим.

Замечание. *Здесь нет четких алгоритмов и успех заранее не гарантирован. Возможно, следовало выбрать какие-то другие уравнения (1) – (4). Заметим, например, что абонентам, которые не должны уметь находить секрет, нельзя выдать уравнения (1), (2) и (4), так как значение бита* z *они не найдут, но определят, что* $w = x = y = 0$*, а это по условию недопустимо. Никакому абоненту нельзя выдать уравнения (2) и (5), так как из них следует, что* $z = 0$.

Абонентам раздать уравнения можно так: A_1: (1), (2); A_2: (1), (5); A_3: (3), (4); A_4: (4), (5). Выполнив замену, запишем ответ в общем случае.

Ответ: Например,

A_1: $w + x = w_0 + x_0$, $x + y = x_0 + y_0$; A_2: $w + x = w_0 + x_0$, $x + y + z = x_0 +$

$y_0 + z_0$;

$$A_3\text{: } y + z = y_0 + z_0,\quad w + x + y = w_0 + x_0 + y_0;$$

$$A_4\text{: } w + x + y = w_0 + x_0 + y_0,\quad x + y + z = x_0 + y_0 + z_0.$$

4. Саша решил отправить Маше записку. Для этого каждую букву сообщения он заменил комбинацией из 0 и 1 согласно таблице (А – 00000, Б – 00001, …, Я – 11111). Взяв день "Д" и номер месяца "М" своего рождения Саша вычислил $u_1 = Д^2 + М^2$, $u_2 = Д \cdot М$, $u_3 = Д - М$. Далее Саша вычислил четвертое $u_4 = r_{32}(u_1 + u_2u_3)$, пятое $u_5 = r_{32}(u_2 + u_3u_4)$, …, n-ое число $u_n = r_{32}(u_{n-3} + u_{n-2}u_{n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. К i-му биту символу исходного сообщения (0 или 1) он прибавил число u_i и взял остаток от деления на 2. Полученную последовательность из 0 и 1 он вновь преобразовал в буквы по таблице и получил следующее сообщение: **ЖДУЛЩБШЛТВШЩЧ**. Помогите Маше прочитать его.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Решение: По условию числа u_k прибавляются к битам открытого текста, а результат заменяется остатком от деления на 2 (то есть на 0 или 1). Поэтому сразу заменим u_k его остатком от деления на 2: считаем, что $u_k = 0$ (если изначально u_k было четным) или $u_k = 1$ (если оно было нечетным). Вычисление остатка от деления на 32 при построении последовательности $u_1, u_2, \dots$ никакой роли не играет (четные числа дают четный остаток, а нечетные – нечетный).

Оказывается, в зависимости от четности чисел Д , М могут быть получены всего три различные последовательности $u_1, u_2, \dots$, а именно:

Числа Д , М нечетные. Тогда $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, …

Числа Д , М имеют разную четность. Тогда $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, …

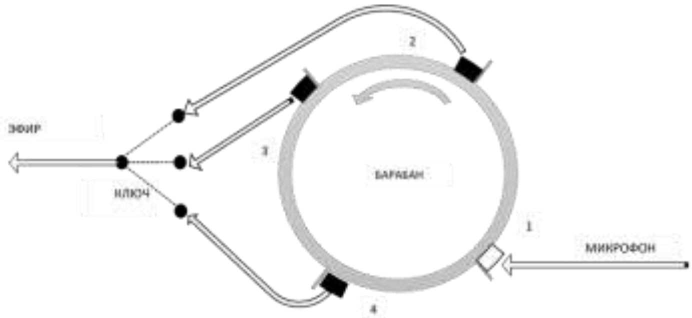
Числа Д , М четные. Тогда $u_1 = u_2 = \dots = u_{32} = 0$. В этом случае текст Машиной записки остался бы без изменения, что, очевидно, не так.

Далее необходимо в первых двух случаях вычислить последовательность $\{u_n\}$ полностью, вычесть ее из зашифрованного текста (**ЗТ**) и убедиться, что читаемый вариант получается во втором случае (см. таблицу).

	Ж	Д	У	Л	Щ	Б	Ш	Л	У	В	Ш	Ц	Ч
	00110	00100	10011	01011	11001	00001	11000	01011	10011	00010	11000	10110	10111
1. Д , М **нечетные**													
$\{u_n\}$	01001	00100	10010	01001	00100	10010	01001	00100	10000	01001	00100	10010	01001
ЗТ-u_n	01111	00000	00001	00010	11101	10011	10001	01111	00011	01011	11100	00100	11110
	П	А	Б	В	Э	У	С	П	Г	Л	Ь	Д	Ю
2. Д , М **разной четности**													
$\{u_n\}$	10111	01110	11101	11011	10111	01110	11101	11011	10110	01110	11101	11011	10111
ЗТ-u_n	10001	01010	01110	10000	01110	01111	00101	10000	00101	01100	00101	01101	00000
	С	К	О	Р	О	П	Е	Р	Е	М	Е	Н	А

Ответ: **СКОРОПЕРЕМЕНА**

5. Звук записывается на магнитный слой барабана, который вращается с постоянной скоростью, совершая один оборот за 4 секунды. Рядом с барабаном по окружности через равные расстояния размещены записывающая (1) и три читающие головки (2), (3), (4). В каждый момент времени в телефонную линию передается сигнал с одной из читающих головок. Устройство спроектировано так, что каждый участок сигнала будет передан в линию один раз, а сама передача стартует, как только начало записи окажется у 3-й читающей головки. Сколько различных вариантов звука, переданного в линию, может получиться, если сообщение длилось 20 секунд?



Решение:

Решим задачу в общем случае, когда передача длилась n секунд. Так как переключение между читающими головками происходит раз в секунду, весь звук можно разбить на n фрагментов по 1 секунде и тогда звук, переданный в линию, будет перестановкой этих фрагментов. Обозначис количество возможных перестановок $T(n)$.

Представим весь процесс в виде таблицы, элементами которой являются номера фрагментов. Например, на второй секунде, с которой начинается передача, на пишущей головке будет 3-ий фрагмент звука, 2-ой фрагмент будет на (2)-ой читающей головке, а 1-ый фрагмент на (3)-ей читающей головке. Передача закончится на $n+1$ секунде.

Сек.	Пишущая головка	Читающая головка			В линию передан
		(2)	(3)	(4)	
0	1	–	–	–	–
1	2	1	–	–	–
2	3	2	1	–	2или 1
3	4	3	2	1	3, 2или 1
4	5	4	3	2	4, 3или 2
…	…	…	…	…	
$n-1$	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	
n	–	n	$n-1$	$n-2$	
$n+1$	–	–	n	$n-1$	n или $n-1$

На n + 1 секунде в линию может быть передан n или $n-1$ фрагмент звука. По очереди рассмотрим оба случая.

1. Пусть на n + 1 секунде в линию был передан n-ый фрагмент (см. таблицу). Тогда n-ый фрагмент не мог быть передан на предыдущей секунде. Если посмотреть на таблицу то видно, что количество перестановок

Читающая головка			В линию
(2)	(3)	(4)	
2	1	–	2 или 1

фрагментов в этом случае совпадает с $T(n-1)$, то есть количеством способов переставить звук длины $n-1$.

3	2	1	3, 2 или 1
4	3	2	4, 3 или 2
…	…	…	
$n-1$	$n-2$	$n-3$	
n	$n-1$	$n-2$	$n-1$ или $n-2$
–	$\boldsymbol{n}$	$n-1$	n

2. Пусть на $n+1$ секунде в линию был передан $(n-1)$-ый фрагмент (см. таблицу). Тогда $(n-1)$-ый фрагмент не мог быть передан на предыдущих секундах. Так как n-ый фрагмент должен уйти в линию, то он должен быть передан в момент времени n. Тогда до $(n-1)$-ой должно быть передано $(n-2)$ последовательных фрагментов, что может быть сделано $T(n-2)$ способами.

Таким образом $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$. Тогда для нахождения количества перестановок $T(n)$ для любого n, достаточно найти $T(1)$, $T(2)$.

$T(1)=1$

Читающая головка			В линию
(2)	(3)	(4)	
–	1	–	1

$T(2)=2$

Читающая головка			В линию
(2)	(3)	(4)	
2	1	–	2 или 1
–	2	1	2 или 1

Остается с использованием формулы $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ вычислить нужное значение.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

Ответ. 10946

6. Рассмотрим девять чисел $k_1, \dots, k_9$, где $k_i \in \{0,1,2\}$. При этом хотя бы одно число k_i отлично от нуля. С помощью этих чисел вырабатывают последовательность $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$ по формулам: $u_1 = k_1$, $u_2 = k_2$, … , $u_9 = k_9$, $u_{i+9} = r_3(u_i + u_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, 2010$, где $r_3(a)$ – остаток от деления числа a на 3. Найдите такое наименьшее натуральное число l, что какие бы исходные числа $k_1, \dots, k_9$ мы ни взяли, в последовательности $u_1, u_2, \dots, u_l$ каждое из чисел 0, 1 и 2 гарантированно встретится хотя бы один раз.

Решение: Для каждого набора $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_9)$ укажем такое минимальное l, что в соответствующей последовательности $u_1, u_2, \dots, u_l$ присутствует каждое из чисел 0, 1 и 2. Затем среди всех таких l останется выбрать наибольшее – это и будет ответом в задаче.

1. В наборе $\boldsymbol{k}$ встречается каждое из чисел 0, 1 и 2. Тогда искомое l не превосходит 9;

2. Набор $\boldsymbol{k}$ состоит только из 1. Тогда $u_{10} = \dots = u_{17} = 2$ и $u_{18} = 0$. Значит $l = 18$;

3. В наборе $\boldsymbol{k}$ присутствуют и 1, и 2, но нет 0. Значит среди чисел $u_1, u_2, \dots, u_9$ есть два соседних (u_s и u_{s+1}), одно из которых равно 1, а другое 2. Тогда $u_{s+9} = 0$ и $l \le 17$;

4. Набор $\boldsymbol{k}$ состоит из 0 и 1. Число 2 впоследствии дадут только две рядом стоящие 1. Поэтому рассмотрим варианты:

a) в $\boldsymbol{k}$ есть рядом стоящие 1. Тогда $l < 19$;

b) в $\boldsymbol{k}$ нет рядом стоящих 1. Здесь возможны следующие случаи:

- Есть хоть одна 1 «не с краю». То есть найдется номер s такой, что $2 \le s \le 8$ и $k_s = 1$. Рядом стоящих 1 нет, поэтому $k_{s-1} = k_{s+1} = 0$. Тогда $u_{s+8} = u_{s+9} = 1$. Следовательно, $u_{s+17} = 2$ и $l \le 25$;
- 1 есть только «с краю». Пусть $\boldsymbol{k} = (1,0, \dots ,0)$. В этом случае начало последовательности u_1, u_2, … можно вычислить непосредственно: $\{u_n\} = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 0,\dots\}$ и убедиться, что $l = 27$. Пусть $\boldsymbol{k} = (1,0, \dots 0,1)$. Тогда $\{u_n\} =\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 0\dots\}$ и $l = 18$. И, наконец, для $\boldsymbol{k} = (0, \dots 0,1)$ находим $\{u_n\} =\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 0, \dots\}$, $l = 26$.

Отметим, что случаи, «$\boldsymbol{k}$ состоит только из 2» и «$\boldsymbol{k}$ состоит только из 0 и 2» эквивалентны случаям 2 и 4 соответственно. Действительно, если в последовательности $\{u_n\}$, отвечающей набору $2 \cdot \boldsymbol{k}$, заменить все 2 на 1, а 1 на 2, то получится последовательность, соответствующая набору $\boldsymbol{k}$.

Ответ: $l = 27$.