Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений (2016 г.).
Физика. 11 класс

Задача 1 *(5 баллов).* Ромб составлен из жестких стержней длиной L. Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплён. Второй начинают двигать с постоянным ускорением a. Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

Решение. Для удобства рассмотрения пронумеруем вершины ромба так, как показано на рисунке 2. Поскольку характер движения вершин 2 и 4 одинаково, будем рассматривать только вершину 2. В момент времени, когда ромб превратится в квадрат, двигающаяся с ускорением a вершина 3 будет иметь скорость v. К этому моменту времени вершина 2 сместится в направлении движения вершины 3 на вдвое меньшее расстояние, чем прошла вершина 3. Значит, проекции скорости и ускорения вершины 2 на направление движения вершины 3 будут равны $v/2$ и $a/2$ соответственно. К рассматриваемому моменту времени вершина 3 пройдет путь $S = L\sqrt{2}$. Поэтому $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2aL\sqrt{2}} = 2^{3/4}\sqrt{aL}$. Так как стержни жесткие, то вершина 2 все время движется по окружности радиусом L с центром в вершине 1. Поэтому скорость u вершины 2 направлена по касательной к этой окружности, то есть в рассматриваемый момент времени направлена вдоль стержня, соединяющего вершины 2 и 3. Следовательно, можно записать:

$$u = \frac{v/2}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{v}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\sqrt{aL}.$$

Проекция ускорения вершины 2 на направление стержня, соединяющего ее с вершиной 1, есть центростремительное ускорение, равное $\frac{u^2}{L} = a\sqrt{2}$.

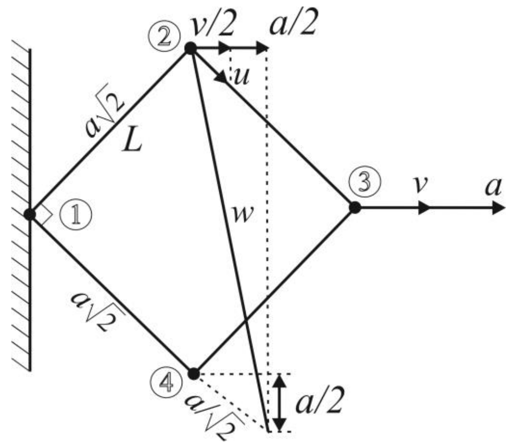


рис. 2.

Мы нашли проекции ускорения вершины 2 на два различных направления. Полное ускорение можно найти, нарисовав соответствующим образом направленные векторы компонентов ускорения, имеющие длины $a/2$ и $a\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляры к ним. Точка пересечения этих перпендикуляров позволит определить направление и величину вектора ускорения вершины 2. Чертеж удобно построить следующим образом. Выберем масштаб так, чтобы вектор $a/2$ на чертеже имел длину, равную четверти диагонали нашего квадрата. Тогда вектор $a\sqrt{2}$ будет иметь длину, равную стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получаем:

$$w = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}})^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Задача 2 *(3 балла).* На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом 45° при основании. По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m (см. рисунок). Чему должна быть ровна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложение к клину, чтобы ускорение тела массой m было направленно горизонтально? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g.

<u>Решение</u>. На тело массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$ силы реакции опоры $\vec{N}$ со стороны клина.

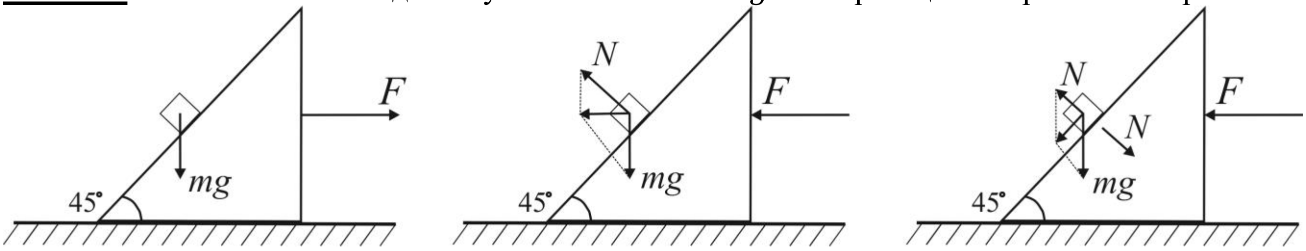


рис. 3.1. рис. 3.2. рис. 3.3.

Как видно из рисунка 3.2, ускорение тела будет горизонтально, если $N = mg\sqrt{2}$. При этом равнодействующая сил, приложенных к телу, равна mg и направлено влево. Поэтому ускорение тела направлено влево и равно по величине g. Для того, чтобы в процессе движения клин давил на тело с необходимой силой $\vec{N}$, он также должен двигаться влево с таким же по величине ускорением g. Чтобы сообщить и клину, и телу такое ускорение, к клину необходимо приложить направленную влево силу *F=(m+M)g.*

Задача 3 *(2 балла).* Искусственный спутник Земли запущен в плоскости экватора так, что он движется по круговой орбите в направлении вращения земли («обгоняя» Землю). Во сколько раз η радиус орбиты спутника R_c больше радиуса Земли $R_З$, если спутник периодически проходит над заданной точкой Земли ровно через n=2 суток? $R_З$=6400 км.

<u>Решение.</u>

$$(\omega - \omega_з)nT = 2\pi$$

$$\omega_з = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{nT} + \omega_з = \frac{2\pi}{nT} + \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$m\omega^2 R_c = \gamma\frac{mM_з}{R_c^2}$$

$$\omega^2 = \gamma\frac{M_з}{R_c^2}$$

$$mg = \gamma\frac{mM_з}{R_з^2}$$

$$\gamma M_з = gR_з^2$$

$$\omega^2 = g\frac{R_з^2}{R_c^2}$$

$$\eta = \frac{R_с}{R_З} = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_З}} = \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_З (n+1)^2}} = 5.$$

Ответ:
$\eta = \frac{R_с}{R_З} = \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_З (n+1)^2}} = 5.$

Задача 4 *(2 балла).* По П-образной рамке, наклоненной под углом α к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать перемычка массой *m*. Длина перемычки *l*, ее сопротивление *r*, индукция поля *B*, коэффициент трения между перемычкой и рамкой μ. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

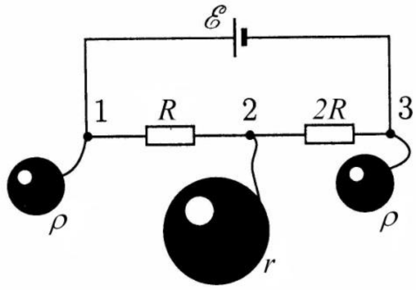
<u>Решение.</u>

$$mgsin\alpha - F_A - F_{тр} = 0$$
$$N = mgcos\alpha$$
$$F_{тр} = \mu N$$
$$F_A = IlB$$
$$I = \frac{\xi}{r}$$
$$\xi = BLv$$

Решая получившуюся систему, получаем:

$$v = \frac{mgr(sin\alpha - \mu cos\alpha)}{B^2 l^2}$$

Задача 5 *(3 балла).* К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами ρ, r и ρ соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, внутреннее сопротивление источника тока равно нулю, ЭДС батареи известен и равен ξ.



<u>Решение.</u> Пусть Q_1, Q_2, Q_3 – заряды шаров после их подсоединения к цепи. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на электрической цепи и соединительных проводниках мал, то $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Найдем разность потенциалов между точками 1и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\rho} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\xi}{3},$$
$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{2\xi}{3}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\rho\xi(r+3\rho)}{3r};\ Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\xi\rho(3\rho-2r)}{3r}; Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\xi\rho.$$