ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС

1. Найдите количество целых решений уравнения на отрезке $[1; 90]$.

$$sin(\pi \cdot log_2 x) + cos(\pi \cdot log_2 x) = 1$$

Решение.

$$sin(\pi \cdot log_2 x) + cos(\pi \cdot log_2 x) = 1 \iff \left[\begin{array}{l} \pi \cdot log_2 x = 2\pi n \\ \pi \cdot log_2 x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда получаем $x = 2^{2n}$ или $x = 2^{\frac{1}{2}+2n}$. Поскольку число $2^{\frac{1}{2}+2n}$ не является целым, остается найти количество целых значений n таких, что $1 \le 2^{2n} \le 90$. Решениями неравенства являются целые числа 0, 1, 2, 3.

Ответ: 4 решения.

2. Решите уравнение в целых числах $12 \cdot 3^{x+y} = 3^x + 3^y$.

Решение. Пусть $y \ge 0$. Исходное уравнение равносильно уравнению $3^x(12 \cdot 3^y - 1) = 3^y$. Тогда $12 \cdot 3^y - 1 = 3^t$, где $y \ge 0, t \ge 0$, чего быть не может. Следовательно, $y \le -1$. Аналогично $x \le -1$. Заменим $x = -k, y = -s$. Тогда $k, s \in \mathbb{N}$. Получим равенство $\frac{12}{3^{k+s}} = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^s} \iff 12 = 3^s + 3^k$. Тогда $k = 1, s = 2$ или $k = 2, s = 1$.

Ответ: $(-1, -2), (-2, -1)$ **.**

3. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;

б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

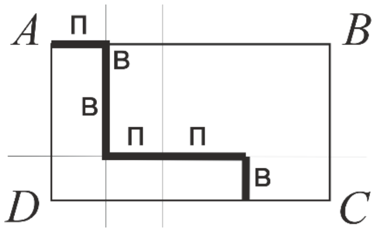
Решение.

а) $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

б) Поделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. $f(x) = h(x)g(x) + x + 4$. Тогда $f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3$.

Ответ: $\sqrt{5} + 3$.

4. На листе клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 изображен прямоугольник. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.



Решение: На рисунке изображен исходный прямоугольник $ABCD$, разбитый на маленькие прямоугольники. Предположим, что путник, находящийся сейчас в вершине A, хочет добраться или до стороны BC, или до стороны CD (до какой получится раньше – путнику все равно). При этом ему разрешается двигаться только

- по сторонам маленьких прямоугольников;
- только вниз (**в**) или вправо (**п**);
- только по сторонам, имеющим четную длину (у каждого прямоугольника хоть одна сторона четная, поэтому путнику всегда будет куда пойти).

На рисунке путник добрался до стороны CD по траектории **пввппв** (за один ход путник смещается вниз или вправо на расстояние, не менее 1, а значит, рано или поздно, цели своего путешествия он достигнет). Ясно, что длина стороны AD равна сумме длин всех отрезков в его траектории. Каждый такой отрезок четен, а значит и длина стороны AD четна.

Аналогично доказывалась бы четность длины AB,если бы путник прежде достиг стороны BC. Утверждение доказано.

5. Существуют ли такие функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y) - g(x,z) = |y - z|$? Ответ обоснуйте.

Решение. Докажем, что таких функций не существует. Предположим, что существуют функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$ такие, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y) - g(x,z) = |y - z|$. Положим $x = 0$. Обозначим $f(0,y) = F(y), g(0,z) = G(z)$.

Тогда $F(y) - G(z) = |y - z|$. Очевидно, что хотя бы одна из функций $F(y)$ или $G(z)$ не является константой. Пусть $G(z)$ не является константой. Тогда существуют такие $z_1 \neq z_2$, что $G(z_1) \neq G(z_2)$. Но тогда $F(y) = G(z_1) - |y - z_1|, F(y) = G(z_2) - |y - z_2|$. Но тогда для любого y выполняется $|y - z_1| - |y - z_2| = G(z_1) - G(z_2) = const$. Очевидно, что это не так. Следовательно, таких функций не существует

Ответ: таких функций не существует.

6. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

Решение. Обозначим $N = 2023, k = 100$. Пусть n_1, n_2, n_3 – числа выстрелов, результатом которых было получение 1, 2 и 3 очков соответственно. Тогда общее число выстрелов m равно:

$$m = N + n_1 + n_2 + n_3$$

Каждый выстрел имеет *результат*, который может быть равен 0, 1, 2 и 3 очкам. При этом с каждым результатом связано определённое число выстрелов, а именно:

1. Если был промах, то этот результат не даёт дополнительных выстрелов, и с ним связан единственный выстрел, который и дал промах;

2. Если было получено одно очко, то с этим результатом связано 3 выстрела, а именно, тот, который дал этот результат, и плюс два дополнительных премиальных;

3. Если было получено 2 очка, то с этим результатом связано 4 выстрела: один – который дал результат, и 3 премиальных.

4. Если было получено 3 очка, то с этим результатом связано 5 выстрелов (аналогичные рассуждения: один исходный+4 премиальных).

Теперь если мы составим сумму

$$1 \times N + 3 \times n_1 + 4 \times n_2 + 5 \times n_3 + k$$

то мы сосчитаем каждый выстрел ровно 2 раза, то есть,

$$N + 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + k = 2m = 2(N + n_1 + n_2 + n_3)$$

откуда получаем число очков, полученных Юрой:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 = N - k$$

Ответ: 1923.

7. Обозначим $a = 3481$, $b = 4120$, $N = 26069$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

Решение. Заметим, что $a = 3481 = 59^2$. Тогда

$$b^2 = 59^2 (mod\ N) \Leftrightarrow (b - 59)(b + 59) = 0 (mod\ N).$$

Следовательно, пары чисел $(b-59)$ и N или $(b+59)$ и N имеют общие делители, отличные от 1. Найдём наибольший общий делитель чисел $(b+59)$ и N по алгоритму Евклида.

$$26069 = 6 \cdot 4179 + 995,$$

$$4179 = 4 \cdot 995 + 199,$$

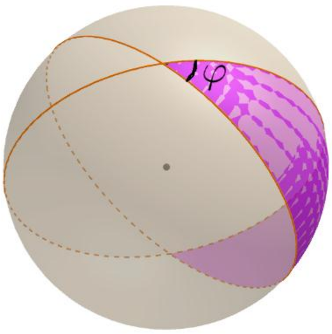
$$995 = 5 \cdot 199.$$

Следовательно, НОД$((b+59), N) = 199$ – простое число. Остаётся разделить N на 199.

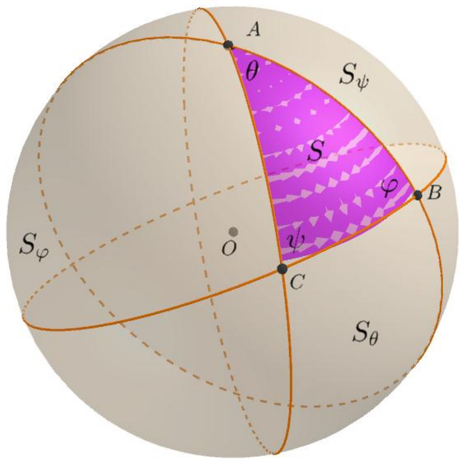
Ответ: $26069 = 131 \cdot 199$.

8. Из центра O сферы радиуса R проведены три луча, пересекающие сферу в точках A, B и C . Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 60^{\circ}$. Найдите площадь части сферы, ограниченной плоскостями $(AOB), (AOC)$ и (BOC).

Решение. В задаче речь идет о трехгранном угле с вершиной в центре сферы, высекающем на сфере криволинейный треугольник. Площадь этого треугольника требуется выразить через радиус сферы и данные в условии плоские углы трехгранного угла, которые будем обозначать $\angle AOB = \alpha, \angle AOC = \beta, \angle BOC = \gamma$.



Рассмотрим сначала две различные плоскости, проходящие через центр сферы. Пусть угол между этими плоскостями равен φ. Плоскости пересекают сферу по большим окружностям. Касательные к окружностям в их точке пересечения также образуют угол φ. Площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$. Площадь высекаемой плоскостями «дольки» (указанной на рисунке цветом) очевидно пропорциональна величине φ и равна $4\pi R^2 \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = 2R^2\varphi$. Три плоскости (содержащие грани трехгранного угла) разбивают сферу на 8 треугольников. Искомую площадь криволинейного треугольника ABC обозначим через S, а его углы (которые, очевидно, являются двугранными углами трехгранного угла $OABC$) за φ, ψ, θ. Площади криволинейных треугольников, примыкающих к сторонам треугольника ABC, обозначим $S_\varphi, S_\psi, S_\theta$. С



каждым из этих треугольников $\triangle ABC$ образует «дольку», поэтому $S + S_{\varphi} = 2R^2\varphi$, $S + S_{\psi} = 2R^2\psi$, $S + S_{\theta} = 2R^2\theta$.

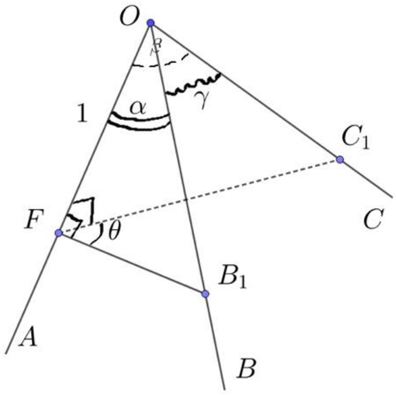
Оставшиеся из 4-х нерассмотренных криволинейных треугольников симметричны 4-м рассмотренным относительно центра сферы. Значит, суммарная площадь рассматриваемых четырех треугольников равна половине площади сферы, то есть $S_{\varphi} + S_{\psi} + S_{\theta} + S = 2\pi R^2$. Отсюда после несложных преобразований для площади S криволинейного $\triangle ABC$ с углами φ, ψ, θ получим известную формулу

$$S = R^2 \cdot (\varphi + \psi + \theta - \pi). \qquad (1)$$

Остается для трехгранного угла $OABC$ выразить его двугранные угла φ, ψ, θ через данные в задаче плоские углы α, β, γ. Для этого применим известную теорему косинусов для трехгранного угла.

Теорема. *Дан трехгранный угол $OABC$, в котором $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle BOC = \gamma$. Пусть θ – величина двугранного угла при ребре AO. Тогда*

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\theta. \qquad (2)$$



По условию все плоские углы одинаковы $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$. Поэтому все двугранные углы φ, ψ, θ также равны между собой. Согласно (2), $\cos\theta = 1/3$ и $\theta = \arccos\frac{1}{3}$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получаем $S = \left(3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi\right) \cdot R^2$.

Ответ: $\left(3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi\right) \cdot R^2$.