**8,9 КЛАСС**

**1.** Найдите все шестизначные числа $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}, a_i \in \{1,2,\dots,9\}$ такие, что $8 \cdot A + a_6 = B$,

где $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_6}$, $b_i = 10 - a_i$. Решение обоснуйте.

**Решение**.

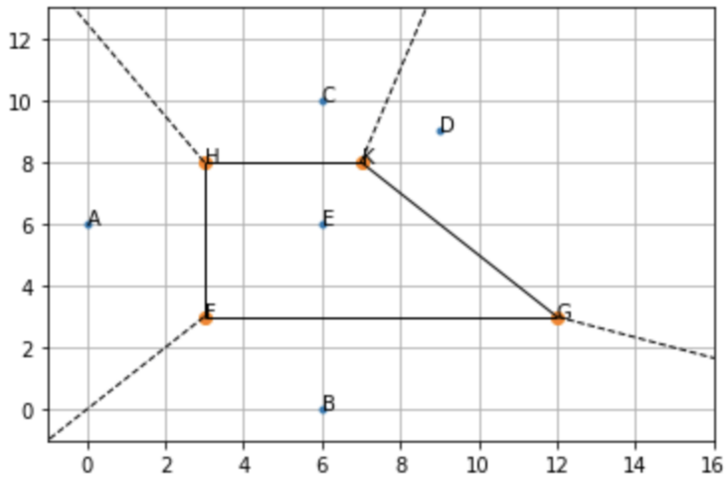
Заметим, что $A + B = \underbrace{11 \dots .1}_{6}0 = \frac{10^6 - 1}{9} \cdot 10$. Тогда из условия $8 \cdot A + a_6 = B$ получим $9 \cdot A + a_6 = \underbrace{11 \dots .1}_{6}0$. Остаток от деления на 9 правой части равен 6.

Следовательно, $a_6 = 6$. Разделим число $(\underbrace{11 \dots .1}_{6}0 - 6)$ на 9. Получим число 123456.

**Ответ**: 123456.

**2.** На координатной плоскости в точках A(0, 6), B(6, 0), C(6, 10), D(9, 9) и E(6, 6) расположены вышки сотовой связи. Будем говорить, что абонент находится в зоне действия данной вышки, если расстоянии до неё меньше, чем до любой другой вышки. Найдите площадь зоны действия вышки E.

**Решение**. Для начала требуется отобразить точки на координатной плоскости. Так как, по условию задачи, требуется найти площадь зоны действия вышки E, то соединим отрезками точку E с точками A, B, C, D. Далее проведем через полученные отрезки срединные перпендикуляры и выделим область, полученную пересечением таких перпендикуляров (отмечены на рис. оранжевым цветом). Таким образом получаем трапецию (см. рисунок ниже), которая демонстрирует область зоны действия вышки E:




Осталось посчитать площадь полученной трапеции. Пересечение срединных перпендикуляров дало нам 4 точки с координатами F(3, 3), H(3, 8), K(7, 8) и G(12, 3). Площадь данной трапеции:

$S = \frac{1}{2} * (HK + FG) * HF = \frac{1}{2} * (4 + 9) * 5 = 32{,}5$

**Ответ:** 32,5.

**3.** Пароли в системе составляются из букв английского алфавита (26 букв) и цифр. При этом требуется, чтобы в пароле содержались цифра и заглавная буква. Пользователь допускается в систему, если предъявленный им пароль отличается от установленного не более чем в одном символе. Сколько паролей, соответствующих требованиям составления, позволят войти в систему, если для пользователя был установлен пароль **1wR8dttf** (не совпадающих с установленным паролем)?

**Решение**. Раскладываем пароль «по слоям»: цифра+заглавная+строчная и смотрим, какие ограничения есть по замене в каждой позиции. Цифр две, поэтому одну их них можно заменить произвольно на любой знак из $26 + 26 + 10 - 1 = 61$. Итого $2 \cdot 61 = 122$ варианта. Если менять заглавную R, то только на заглавную – 25 вариантов. Строчные можно на любые, это еще $5 \cdot 61 = 305$ вариантов.

**Ответ**: 452.

**4.** Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_4)$ – двоичный вектор длины 4. Обозначим $\boldsymbol{x}^d$ – циклический сдвиг вектора $\boldsymbol{x}$ на $d$ позиций вправо. Например, если $\boldsymbol{x} = (1{,}0{,}0{,}0)$, то $\boldsymbol{x}^2 = (0{,}0{,}1{,}0)$.

При этом считаем, что $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}$. Под суммой векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_4)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_4)$ будем понимать вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3, x_4 \oplus y_4)$.

Здесь $\oplus$ – стандартная операция сложения битов:

$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2$. Найдите $d_1, \dots, d_n$ такие, что при любом исходном векторе $\boldsymbol{v}$ выполняется равенство $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^{d_1} + \dots + \boldsymbol{x}^{d_n}$.

**Решение**. Заметим, что $\boldsymbol{x}^{d+4n} = \boldsymbol{x}^d$ для любого натурального числа $n$. Вектору $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_4)$ взаимно-однозначно соответствует многочлен $x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3$. Тогда циклический сдвиг вектора $\boldsymbol{x}$ на $d$ позиций вправо равносилен умножению многочлена $\boldsymbol{x(t)}$ на $\boldsymbol{t^d}$ и приведению степеней мономов по модулю 4. Вектору $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2$ соответствует многочлен $x(t) = 1 + t + t^2$. Таким образом, нахождение $d_1, \dots, d_n$ таких, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^{d_1} + \dots + \boldsymbol{x}^{d_n}$ равносильно нахождению многочлена $v(t) = t^{d_1} + \dots + t^{d_n}$ со свойством $x(t)v(t) = 1$ (с учётом приведения степеней мономов по модулю 4). Найти многочлен $v(t)$ можно методом неопределённых коэффициентов, но быстрее из следующего алгоритма: $x(t)^2 = 1 + t^2 + t^4 = t^2$, $x(t)^4 = t^4 = 1$. Следовательно, $v(t) = x(t)^3 = 1 + t^2 + t^3$.

**Ответ**: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3$.

**5.** Имеется устройство, которое строит последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$ следующим образом: первые два члена $x_0$ и $x_1$ мы задаем самостоятельно, а последующие члены устройство вычисляет так: $x_2 = x_0 + 14 \cdot (x_1 + k_1), x_3 = x_1 + 14 \cdot (x_2 + k_2), \dots$ Здесь $k_1, k_2, \dots$ – некоторая фиксированная ключевая последовательность. При этом все числа $x_0, x_1, x_2, \dots$ и $k_1, k_2, \dots$ являются целыми, лежащими в пределах от 0 до 30 включительно. (Если в процессе вычислений получится число, превосходящее 30, то результат будет заменен его остатком от деления на 31; например, $16 + 14 \cdot 5 = 24$.) С помощью этого устройства построили две последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ и $b_0, b_1, b_2, \dots$, по первым членам $a_0 = 2, a_1 = 4$ и $b_0 = 8, b_1 = 26$. Верно ли, что найдётся ключевая последовательность $k_1, k_2, \dots$ и некоторое целое t такие, что выполняются условия:
а) $b_t = a_t, b_{t+1} = a_{t+1}$;
б) $b_t = a_t, b_{t+1} = a_{t+1} + 6$?
В случае положительного ответа укажите t и набор $k_1, k_2, \dots, k_{t-1}$.

**Решение.**

а) Для всех $t \geq 1$ $a_{t+1} = a_{t-1} + 14(a_t + k_t)$, $a_{t-1} = a_{t+1} - 14(a_t + k_t)$. Поэтому, если $b_t = a_t, b_{t+1} = a_{t+1}$, то $b_{t-1} = a_{t-1}, b_{t-2} = a_{t-2}, \dots, b_1 = a_1, b_0 = a_0$, что противоречит условию.

б) Удобно перейти к разностям полублоков $z_t = b_t - a_t$ (везде далее действия с полублоками (умножение, сложение и вычитание) производятся по модулю M) и выяснить, может ли появиться биграмма (0,6) в $\{z_t\}$. Из (1) получаем, что:

$$z_{t+1} = b_{t-1} + 14(b_t + k_t) - \big(a_{t-1} + 14(a_t + k_t)\big) = z_{t-1} + 14 \cdot z_t, t \geq 1,$$

Последовательность разностей не зависит от ключа. По условию $(z_0, z_1) = (6{,}22)$, выработанный на этом заполнении цикл:

$$\{z_t\} = \{6, 22, 4, 16, 11, 15, 4, 9, 6, 0\}$$

Имеет период $T = 10$, ноль – последний элемент цикла, после него следует 6.

**Ответ:** да, верно, при $t = 10$ и любом ключе.

**6.** Для входа в университет Криптоландии у каждого студента есть карточка, на которой записана уникальная (у каждого студента своя) последовательность $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ из целых чисел от 0 до 6. При входе в университет студент прикладывает карточку к устройству, которое подсчитывает величины $A$ и $B$ по формулам:

$$A = \big((x_1 * x_2) * x_3\big) * x_4,$$
$$B = (x_5 \circ x_6) \circ x_7.$$

Операции $*$ и $\circ$ задаются таблицами (представляющими собой латинские квадраты: у них в каждой строке и каждом столбце числа не повторяются). Например, $3 * 5 = 4$, $2 \circ 4 = 3$. Студенту разрешат войти, если $A = B$. Сколько самое большое может быть студентов в таком университете?

| * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 6 | 1 | 2 | 4 | 0 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 6 | 0 | 2 | 5 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 1 | 0 | 2 | 6 |
| 3 | 6 | 0 | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 6 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 6 | 5 |
| 6 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 1 | 0 |

| ∘ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 5 | 6 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 0 | 6 |
| 3 | 6 | 1 | 0 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 1 | 6 | 4 | 0 |
| 5 | 3 | 6 | 5 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| 6 | 0 | 4 | 1 | 6 | 2 | 3 | 5 |

**Решение.** Если код составлен из чисел от 0 до $m-1$, то для каждого числа

$$k \in \{0, \dots, m-1\}$$

число последовательностей $x_1, x_2, x_3, x_4$, для которых $A = k$, равно $m^3$, так как при любых заданных $x_1, x_2, x_3$ значение $x_4$ определяется в этом случае однозначно. Аналогично, число последовательностей $x_5, x_6, x_7$, для которых $B = k$, равно $m^2$. Тогда общее число последовательностей $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, для которых $A = B = k$, равно $m^3 m^2 = m^5$. Суммируя по $k$ от 0 до $m-1$, получаем ответ: $m^6$.

**Ответ:** $7^6$.