

Вариант 4.1

1. Найдите значение p , если корни уравнения $x^2 + x + p = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$.
2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x-2} + x}{x-2} \geq 2$.
3. Первой трубе для наполнения резервуара объёмом 3 куб. метра требуется на 0,5 часа дольше, чем второй для наполнения резервуара объёмом 2 куб. метра. При одновременной работе двух труб резервуар объёмом 10 куб. метров наполняется за 2,5 часа. Найдите производительности труб.
4. В арифметической прогрессии сумма 20-го и 30-го членов равна 23, а сумма первых 97 членов равна 485. Найдите первый член прогрессии.
5. Решите уравнение $5^{x^2+2x} - 5^{x^2+2} - 5^{2x+1} + 125 = 0$.
6. Решите уравнение $\cos^4 x - 2 \sin x - \sin^4 x - 1 = 0$.
7. Решите уравнение $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x^2+7x+6} = 2x+7$.
8. При каких a уравнение $\sqrt{x-a} = x+a-3$ имеет одно решение?

РЕШЕНИЯ

1. Найдите значение p , если корни уравнения $x^2 + x + p = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$.

Решение. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = p$.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4x_1 x_2.$$

Откуда найдём $p = \frac{1}{6}$.

Ответ: $p = \frac{1}{6}$.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x-2} + x}{x-2} \geq 2$.

Ответ: $x \in (2; 6]$.

3. Первой трубе для наполнения резервуара объёмом 3 куб. метра требуется на 0,5 часа дольше, чем второй для наполнения резервуара объёмом 2 куб. метра. При одновременной работе двух труб резервуар объёмом 10 куб. метров наполняется за 2,5 часа. Найдите производительности труб.

Решение. обозначим x, y – производительности первой и второй трубы соответственно. Из условия задачи составим систему уравнений $\frac{3}{x} = \frac{2}{y} + \frac{1}{2}$,

$$\frac{10}{x+y} = \frac{5}{2}. \text{ Откуда найдём } x = y = 2.$$

Ответ: $x = y = 2$.

4. В арифметической прогрессии сумма 20-го и 30-го членов равна 23, а сумма первых 97 членов равна 485. Найдите первый член прогрессии.

Решение. Из условия задачи получим систему $a_1 + 19d + a_1 + 29d = 23$,
 $\frac{(2a_1 + 96d)}{2} \cdot 97 = 485$.

Откуда найдём $a_1 = 18$.

Ответ: $a_1 = 18$.

5. Решите уравнение $5^{x^2+2x} - 5^{x^2+2} - 5^{2x+1} + 125 = 0$.

Решение. $5^{x^2+2x} - 5^{x^2+2} - 5^{2x+1} + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^{2x} - 5^2)(5^{x^2} - 5) = 0$

Откуда $x = 1, x = -1$.

Ответ: $x = 1, x = -1$.

6. Решите уравнение $\cos^4 x - 2 \sin x - \sin^4 x - 1 = 0$.

Решение.

$$\cos^4 x - 2 \sin x - \sin^4 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = 0.$$

Откуда $x = \pi n, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Решите уравнение $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x^2+7x+6} = 2x+7$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+6} = a, \sqrt{x+1} = b$.

Тогда

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x^2+7x+6} = 2x+7 \Leftrightarrow a - b + 2ab = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a-b)(b-a-1) = 0$$

Отсюда найдём $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

8. При каких a уравнение $\sqrt{x-a} = x+a-3$ имеет одно решение?

Решение. Обозначим $\sqrt{x-a} = t$. Следовательно, $t \geq 0, x = t^2 + a$.

Тогда уравнение $\sqrt{x-a} = x+a-3$ имеет одно решение $\Leftrightarrow t = t^2 + 2a - 3$
имеет одно решение при $t \geq 0$.

1 случай: $D=0$. Отсюда $a = \frac{13}{8}$.

2 случай: $t_1 < 0 \leq t_2$. Это равносильно $f(0) < 0$

или $f(0) = 0, t_0 < 0$, где $f(t) = t^2 - t + 2a - 3$. Отсюда $a < \frac{3}{2}$

Ответ: $a < \frac{3}{2}, a = \frac{13}{8}$.