

Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2019-2020 учебном году
11 класс
Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Два тела массой m и nm , соединенные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости. В начальный момент времени нить не провисает. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен μ . К левому телу приложена постоянная горизонтальная сила F , направленная влево. К правому телу приложена линейно возрастающая горизонтальная сила $F' = kt$, направленная направо. Найти скорость движения системы V в момент времени t_0 . Постоянные величины имеют следующие значения: $F = 4$ Н, $m = 1$ кг, $n = 2$, $\mu = 0.1$, $k = 0.5$ Н/с, $g = 10$ м/с², $t_0 = 10$ с.

Решение:

Состояние системы можно разделить на три этапа. Первый этап – движение влево до момента времени t_1 , второй этап – система неподвижна, третий этап – движение направо с момента времени t_2 .

Введем систему координат с осью X , направленной горизонтально. Запишем проекцию второго закона Ньютона на ось X .

1 этап.

$$F - T - \mu mg = ma$$

$$T - \mu nmg - kt = nma$$

В момент времени t_1 $a = 0$.

$$t_1 = (F - \mu mg(n + 1))/k$$

3 этап.

$$-F + T - \mu mg = ma$$

$$-T - \mu nmg + kt = nma$$

В момент времени t_2 $a = 0$.

$$t_2 = (F + \mu mg(n + 1))/k$$

По условию задачи $t_1 = 2$ с, $t_2 = 14$ с. Следовательно, в момент времени t_0 $V = 0$ м/с.

Ответ: $V = 0$ м/с.

Задача 2. (20 баллов). На горизонтальной пружине с жесткостью k закреплено тонкое колесико, которое без проскальзывания может катиться по горизонтальной поверхности. Вся масса колесика m сосредоточена на его ободе, спицы невесомы. Определить частоту малых колебаний такой системы.



Решение:

Полная энергия системы складывается из энергии пружины, кинетической энергии поступательного движения колесика и энергии его вращательного движения. При движении без проскальзывания энергии поступательного и вращательного движения равны. Тогда полная энергия

$$E = \frac{2mV^2}{2} + k \frac{x^2}{2}$$

Сравнивая с энергией колебаний пружинного маятника

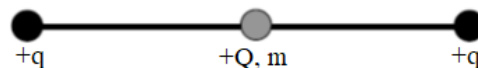
$$E_0 = \frac{mV^2}{2} + k \frac{x^2}{2}$$

замечаем, что при наличии колесика в уравнении используется удвоенная масса. Применяя известную формулу для частоты колебаний пружинного маятника, находим, что частота колебаний системы с колесиком будет равна:

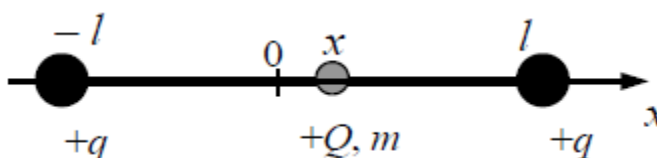
$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$

Задача 3. (20 баллов). Бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$. На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$ (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T . Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.



Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$\begin{aligned} F &= \frac{kQq}{(l+x)^2} - \frac{kQq}{(l-x)^2} = kQq \frac{(l-x)^2 - (l+x)^2}{(l+x)^2 (l-x)^2} = \\ &= -4lkQq \frac{x}{(l+x)^2 (l-x)^2} = -4lkQq \frac{x}{[(l+x)(l-x)]^2} = \\ &= -4lkQq \frac{x}{(l^2 - x^2)^2} = -4lkQq \frac{x}{l^4 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Так как $|x| \ll l$, то $\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1$, поэтому $F = -4lkQq \frac{x}{l^4} = -\frac{4kQq}{l^3} x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x . Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -\frac{4lkQq}{l^3} x$, пропорционально смещению.

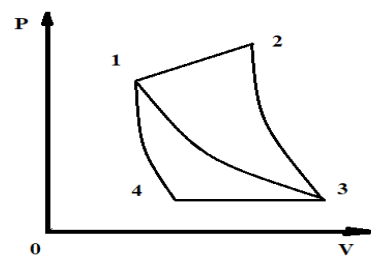
Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a + \omega^2 x = 0$, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0 \cos \omega t$ и период равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Для бусинки $a + \frac{4kQq}{m l^3} x = 0$. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{m l^3}}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m l^3}}} = \pi \sqrt{\frac{m l^3}{kQq}}$$

Ответ: Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 4. (20 баллов). КПД цикла $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$, состоящего из процесса с линейной зависимостью давления от объема $(1 \rightarrow 2)$, адиабаты $(2 \rightarrow 3)$ и изотермы $(3 \rightarrow 1)$ равен η_1 . КПД цикла $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$, состоящего из изотермы $(1 \rightarrow 3)$, изобары $(3 \rightarrow 4)$ и адиабаты $(4 \rightarrow 1)$ равен η_2 . Чему равен КПД η цикла $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$? Рабочим веществом тепловой машины является идеальный газ. Циклы показаны на рисунке.



Решение:

$$\text{КПД цикла } (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \text{ по определению равен } \eta_1 = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1,2}}.$$

$$\text{КПД цикла } (1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1) \text{ по определению равен } \eta_2 = \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1,3}}.$$

Здесь и далее $Q_{i,j} = Q_{j,i} \geq 0$.

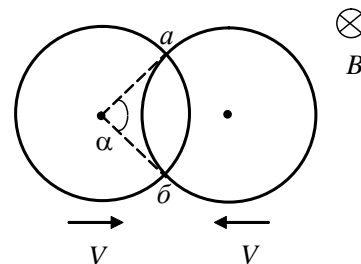
$$\text{КПД искомого цикла } (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) \text{ по определению равен } \eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}}.$$

Преобразуем последнее выражение к ответу

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1,2}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = \eta_1 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_2 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = \\ &= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1,3}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = \\ &= \eta_1 + \eta_2 + (Q_{1,3} - Q_{3,4}) \left(\frac{1}{Q_{1,2}} - \frac{1}{Q_{1,3}} \right) = \\ &= \eta_1 + \eta_2 + (Q_{1,3} - Q_{3,4}) \frac{Q_{1,3} - Q_{1,2}}{Q_{1,3} Q_{1,2}} = \\ &= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1,2}} \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1,3}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2. \end{aligned}$$

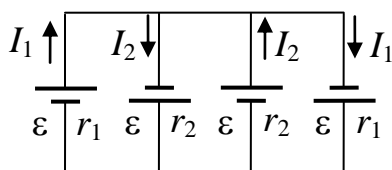
Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2$.

Задача 5. (20 баллов). Два одинаковых проволочных кольца радиусом R движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры, в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости колец (см. рис.). Найти направления и модули сил, действующих на каждое кольцо со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны V , а центральный угол, стороны которого проходят через точки касания колец a и b , равен α . В точках касания колец a и b имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки кольца, длина которой равна длине окружности кольца, составляет r . Индуктивностями колец пренебречь.



Решение:

Эквивалентная электрическая схема:



ЭДС ε действует на каждом из четырех участков колец, расположенных между точками касания a и b . Обозначения условных источников: короткий отрезок используется для клеммы «минус», длинный отрезок — для клеммы «плюс». Величина ЭДС равна:

$$\varepsilon = 2BVR \sin \frac{\alpha}{2}$$

Сопротивления участков попарно одинаковы и равны:

$$r_1 = \frac{r(2\pi - \alpha)}{2\pi}$$

$$r_2 = \frac{r\alpha}{2\pi}$$

Направления токов на каждом из четырех участков указаны на рисунке. Величины токов определяются с помощью законов Кирхгофа и равны:

$$I_1 = \varepsilon/r_1$$

$$I_2 = \varepsilon/r_2$$

В силу симметрии задачи результирующая сила Ампера \mathbf{F} , действующая со стороны магнитного поля на каждое из колец, направлена вдоль прямой, проходящей через центры колец. С учетом соотношений модуль силы Ампера F равен:

$$F = \sum_i (I_1 + I_2) B \Delta l_i \cos \varphi_i = (I_1 + I_2) B \sum_i \Delta l_i \cos \varphi_i = (I_1 + I_2) B l_{ab} =$$

$$= \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

где Δl_i – малый участок кольца, на который действует сила Ампера \mathbf{F}_i , направленная вдоль радиуса кольца под углом φ_i к прямой, проходящей через центры колец, l_{ab} – расстояние между точками касания a и b ; суммирование ведется по всем углам φ_i в пределах от $-\alpha/2$ до $\alpha/2$ (на остальных сегментах колец силы Ампера взаимно компенсируются).

Результирующая сила \mathbf{F} , действующая на кольцо, направлена противоположно вектору скорости этого кольца.

Ответ: $F = \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, сила направлена противоположно скорости кольца.