ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

10 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y$.

Решение. Пусть $y \geq 1$. Исходное уравнение равносильно уравнению $3^{x+1}(3^{y-1} - 2) = 3^y$. Следовательно, $3^{y-1} - 2 = 1$. Отсюда находим $y = 2, x = 1$. Пусть $x \geq 1$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $3^y(3^x - 1) = 2 \cdot 3^{x+1}$. Тогда $3^x - 1 = 2 \cdot 3^t$, где $t \geq 1$, $3^t(3^{x-t} - 2) = 1$. Следовательно, $t = 0$, $x = 1, y = 2$.

Пусть $y \leq 0, x \leq 0$. Заменим $x = -k$, $y == -s$. Тогда $k, s \in \mathbb{N}_0$. Получим уравнение $\frac{1}{3^{k+s}} = \frac{6}{3^k} + \frac{1}{3^s} \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot 3^s + 3^k$, не имеющее решений.

Ответ: $(1,2)$.

2. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$; б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

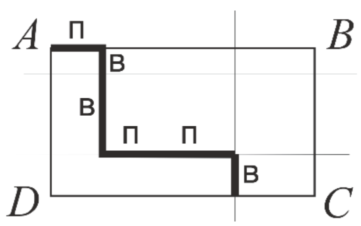
Решение. а) $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

б) Поделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. $f(x) = h(x)g(x) + x + 4$. Тогда

$$f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3.$$

Ответ: $\sqrt{5} + 3$

3. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.



Решение: На рисунке изображен исходный прямоугольник $ABCD$, разбитый на маленькие прямоугольники. Предположим, что путник, находящийся сейчас в вершине A, хочет добраться или до стороны BC, или до стороны CD (до какой получится раньше – путнику все равно). При этом ему разрешается двигаться только

- по сторонам маленьких прямоугольников;
- только вниз (**в**) или вправо (**п**);

- только по сторонам, имеющим четную длину (у каждого прямоугольника хоть одна сторона четная, поэтому путнику всегда будет куда пойти).

На рисунке путник добрался до стороны CD по траектории **пввппв** (за один ход путник смещается вниз или вправо на расстояние, не менее 1, а значит, рано или поздно, цели своего путешествия он достигнет). Ясно, что длина стороны AD равна сумме длин всех отрезков в его траектории. Каждый такой отрезок четен, а значит и длина стороны AD четна. Аналогично доказывается четность длины стороны AB в случае, если путник прежде достиг стороны BC. Утверждение доказано.

4. Существуют ли такие функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$? Ответ обоснуйте.

Решение. Докажем, что таких функций не существует. Предположим, что существуют функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$ такие, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$. Положим $x=0$. Обозначим $f(0,y)=F(y), g(0,z)=G(z)$.

Тогда $F(y)-G(z)=|y-z|$. Очевидно, что хотя бы одна из функций $F(y)$ или $G(z)$ не является константой. Пусть $G(z)$ не является константой. Тогда существуют такие $z_1\neq z_2$, что $G(z_1)\neq G(z_2)$. Но тогда $F(y)=G(z_1)-|y-z_1|, F(y)=G(z_2)-|y-z_2|$ и для любого y выполняется $|y-z_1|-|y-z_2|=G(z_1)-G(z_2)=const$. Очевидно, что это не так. Следовательно, таких функций не существует

Ответ: таких функций не существует.

5. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

Решение. Обозначим $N=2023, k=100$. Пусть n_1,n_2,n_3 – числа выстрелов, результатом которых было получение 1, 2 и 3 очков соответственно. Тогда общее число выстрелов m равно:

$$m=N+n_1+n_2+n_3$$

Каждый выстрел имеет *результат*, который может быть равен 0, 1, 2 и 3 очкам. При этом с каждым результатом связано определённое число выстрелов, а именно:

1. Если был промах, то этот результат не даёт дополнительных выстрелов, и с ним связан единственный выстрел, который и дал промах;

2. Если было получено одно очко, то с этим результатом связано 3 выстрела, а именно, тот, который дал этот результат, и плюс два дополнительных премиальных;

3. Если было получено 2 очка, то с этим результатом связано 4 выстрела: один – который дал результат, и 3 премиальных.

4. Если было получено 3 очка, то с этим результатом связано 5 выстрелов (аналогичные рассуждения: один исходный+4 премиальных).

Теперь если мы составим сумму

$$1 \times N + 3 \times n_1 + 4 \times n_2 + 5 \times n_3 + k$$

то мы сосчитаем каждый выстрел ровно 2 раза, то есть,

$$N + 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + k = 2m = 2(N + n_1 + n_2 + n_3)$$

откуда получаем число очков, полученных Юрой:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 = N - k$$

Ответ: 1923.

6. Обозначим $a = 729$, $b = 241$, $N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

Решение. Заметим, что $a = 729 = 27^2$. Тогда

$$b^2 = 27^2(mod\ N) \Leftrightarrow (b - 27)(b + 27) = 0(mod\ N).$$

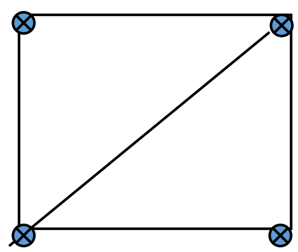
Следовательно, пары чисел $(b - 27)$ и N или $(b + 27)$ и N имеют общие делители, отличные от 1. Найдём наибольший общий делитель чисел $(b + 27)$ и N по алгоритму Евклида.

$$7169 = 26 \cdot 268 + 201,$$
$$268 = 201 + 67.$$

Следовательно, НОД$((b + 59), N) = 67$ – простое число. Остаётся разделить N на 67.

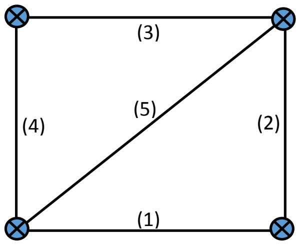
Ответ: $7169 = 67 \cdot 107$.

7. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер



сможет обменяться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).

Решение. Занумеруем отрезки как показано на рисунке.



Обозначим 0 – провод перерезан, 1 – нет. Выпишем все варианты, при которых целостность сети нарушится.

(5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

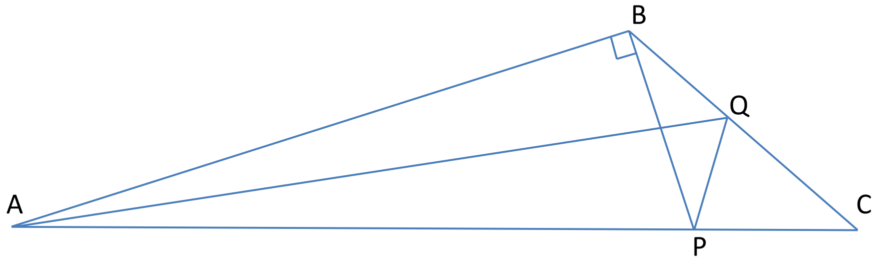
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(1)	0	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	0	1	0	0	0	0

Общее количество векторов равно 32, из них подходящих векторов – 18. Вероятность получения каждого вектора равна $\mathbf{\frac{18}{32}}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{9}{16}}$.

8. В треугольнике ABC угол BAC равен 14°, а угол ACB равен 31°. На стороне AC взята точка P так, что угол ABP – прямой. Пусть AQ – биссектриса треугольника ABC. Найдите угол QPC.

Решение. Так как $\angle A = 14^{\circ}$, то $\angle QAC = \angle QAB = 7^{\circ}$, $\angle C = 31^{\circ}$, $\angle ABC = 135^{\circ}$. Но тогда BQ – биссектриса внешнего угла треугольника ABC. Так как AQ – биссектриса внешнего угла BAC, то PQ – биссектриса внешнего угла BPC. Следовательно, $\angle QPC = \frac{1}{2}\angle BPC = 52^{\circ}$.



Ответ: 52°