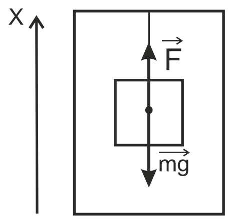
Варианты заданий заключительного этапа олимпиады в 2013/2014 учебном году

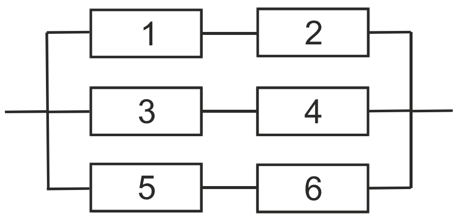
Заключительный 9 класс (2013/14)

Вариант 1



Задача 1 (2 балла). Груз массы m = 1 кг подвешен на нити к потолку кабины движущегося лифта. Груз действует на нить с силой $F^* = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать для простоты вычислений $g = 10$ м/с^2.

Задача 2 (3 балла). Для того, чтобы нагреть в сосуде лед, имеющий начальную температуру $T_0 = -50^0$C, до температуры плавления ($T = 0^0$C) и превратить его полностью в воду, потребовалось время t= 5 мин. В течение какого времени $t_{таяния}$ таял лед? Тепло к сосуду подводилось равномерно (пропорционально времени). Тепловые потери отсутствуют. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 2{,}5\cdot10^4$ Дж/кг. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К).



Задача 3 (4 балла). На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется минимальная мощность в виде тепла? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту минимальную мощность $P_{мин}$, если ко всей цепи указанной схемы приложено напряжение U = 100 В.

Задача 4 (2 балла). Начальная скорость прямолинейно и равноускоренно движущегося тела равна v_0. Известно, что скорость тела возрастает в 2 раза на расстоянии S от начальной точки. Через какое время τ скорость тела увеличится в n раз?

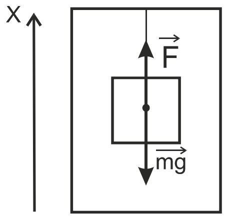
Задача 5 (5 баллов). Самолет движется по прямой между городами A и B туда и обратно. Скорость самолета относительно воздуха постоянна и равна v. Под некоторым углом α к прямой AB во время всего полета дует ветер с постоянной скоростью u. При каких значениях угла α время полета самолета $t_{макс}$ между городами A и B туда и обратно будет максимальным? Найти максимальное время $t_{макс}$ полета самолета туда и обратно. Ответ обоснуйте математически. Считать, что время разворота самолета в пункте B пренебрежимо мало по сравнению со временем всего полета.

Решения задач 1 варианта 9 класса (2013/14)

Задача **1**. Груз массы m = 1 кг подвешен на нити к потолку кабины движущегося лифта. Груз действует на нить с силой $F^* = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать для простоты вычислений g = 10 м/с^2.

Решение:

Обозначим на рисунке силы, действующие на груз. Направим ось X вертикально вверх.



Запишем в векторном виде уравнение движения груза.

$$m\vec{a} = \vec{\phi} + m\vec{g}$$

Запишем в проекции на ось X уравнение движения груза, и решим его относительно a_x.

$$ma_x = \phi + mg$$

$$\phi = F$$

$$a_x = \frac{F}{m} - g$$

После подстановки численных значений получаем:

$$a_x = \frac{5}{1} - 10 = -5\frac{м}{с^2}$$

Отрицательное a_x говорит о том, что лифт движется вниз.

$$a_x = |a_x| = g - \frac{F}{m} = 5\frac{м}{с^2}$$

Ответ: лифт едет вниз; $a_x = g - \dfrac{F}{m} = 5\dfrac{м}{с^2}$.

Задача **2**. Для того, чтобы нагреть в сосуде лед, имеющий начальную температуру $T_0 = -50^0$C, до температуры плавления (T $=0^0$C) и превратить его полностью в воду, потребовалось время t= 5 мин. В течение какого времени $t_{таяния}$ таял лед? Тепло к сосуду подводилось равномерно (пропорционально времени). Тепловые потери отсутствуют. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 2{,}5\cdot10^4$ Дж/кг. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

Решение:

Запишем тепловой баланс как для всего процесса (нагрев + таяние льда), так и для части процесса (только таяние льда), учитывая пропорциональность по времени подвода тепла к сосуду (α – коэффициент пропорциональности).

$$\begin{cases} m\lambda + cm(T - T_0) = Q = \alpha t \\ \lambda m = Q_{ТАЯН} = \alpha t_{ТАЯН} \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое:

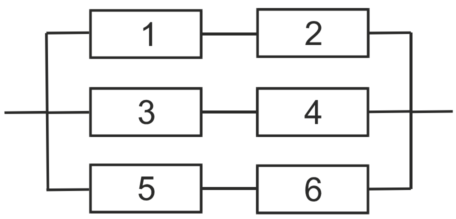
$$\frac{t_{ТАЯН}}{t} = \frac{\lambda m}{m\lambda + cm(T - T_0)}$$

В результате получим:

$$t_{ТАЯН} = \frac{\lambda t}{\lambda + c(T - T_0)} = \frac{2.5 \cdot 10^4 \cdot 5(мин)}{2.5 \cdot 10^4 + 2.1 \cdot 10^3 \cdot 50} = 0.96 \approx 1 мин$$

Ответ: $t_{ТАЯН} = \frac{\lambda t}{\lambda + c(T - T_0)} = \frac{2.5 \cdot 10^4 \cdot 5(мин)}{2.5 \cdot 10^4 + 2.1 \cdot 10^3 \cdot 50} = 0.96 \approx 1 мин$

Задача ***3***. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется минимальная мощность в виде тепла? R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 4 Ом, R_5 = 5 Ом, R_6 = 6 Ом. Найти эту минимальную мощность $P_{мин}$, если ко всей цепи указанной схемы приложено напряжение U = 100 В.



Решение:

Найдем сопротивление каждой ветви смешанного соединения сопротивлений и токи, текущие в каждой из ветвей:

$$R_{12} = R_1 + R_2;\ \ I_{12} = \frac{U}{R_{12}}$$

$$R_{34} = R_3 + R_4;\ I_{34} = \frac{U}{R_{34}}$$

$$R_{56} = R_5 + R_6;\ I_{56} = \frac{U}{R_{56}}$$

Согласно закону Джоуля-Ленца запишем мощность, выделяемую каждым из сопротивлений:

$$P_i = R_i I_i^2 = \frac{R_i U^2}{R_{12}^2}, i = 1,2$$

$$P_j = R_j I_j^2 = \frac{R_j U^2}{R_{12}^2}, j = 3,4$$

$$P_k = R_k I_k^2 = \frac{R_k U^2}{R_{12}^2}, k = 5{,}6$$

Очевидно, что в каждой ветви цепи минимальное по номиналу сопротивление выделяет минимальную мощность:

$$P_1 = \min\{P_1, P_2\};\ P_3 = \min\{P_3, P_4\};\ P_5 = \min\{P_5, P_6\};$$

Приведенный ниже расчет дает, что 5-е сопротивление выделяет минимальную мощность:

$$P_5 - P_1 = U^2\left[\frac{R_5}{R_{56}^2} - \frac{R_1}{R_{12}^2}\right] = 10^4\left[\frac{5}{121} - \frac{1}{9}\right] < 0;$$

$$P_5 - P_3 = U^2\left[\frac{R_5}{R_{56}^2} - \frac{R_3}{R_{34}^2}\right] = 10^4\left[\frac{5}{121} - \frac{3}{49}\right] < 0;$$

$$P_{min} = P_5 = U^2\frac{R_5}{R_{56}^2} = \frac{10^4 * 5}{121} = 413 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_{min} = P_5 = \dfrac{U^2 R_5}{(R_5 + R_6)^2} = 413$ Вт.

Задача ***4***. Начальная скорость прямолинейно и равноускоренно движущегося тела равна v_0. Известно, что скорость тела возрастает в 2 раза на расстоянии S от начальной точки. Через какое время τ скорость тела увеличится в n раз?

Решение:

Используя известное кинематическое соотношение (для равноускоренного движения) и первое условие задачи (о соотношении конечной и начальной скоростей), найдем ускорение тела.

$$S = \frac{V^2 - V_0^2}{2a} = \frac{4V_0^2 - V_0^2}{2a} = \frac{3}{2} * \frac{V_0^2}{a};$$

$$a = \frac{3}{2} * \frac{V_0^2}{S};$$

Используем второе условие задачи:

$$nV_0 = V_0 + a\tau;$$

$$(n-1)V_0 = a\tau;$$

В результате получаем:

$$\tau = \frac{(n-1)V_0}{a} = \frac{2(n-1)S}{3V_0};$$

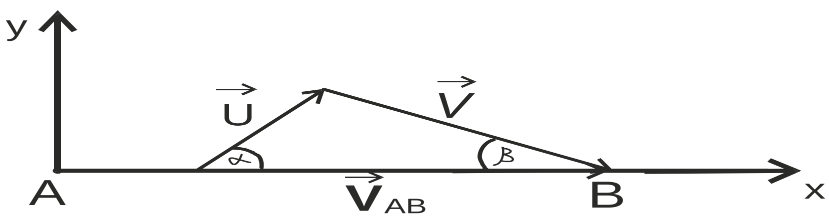
$$\text{Ответ: } \tau = \frac{2(n-1)S}{3V_0}$$

Задача **5**. Самолет движется по прямой между городами A и B туда и обратно. Скорость самолета относительно воздуха постоянна и равна v. Под некоторым углом α к прямой AB во время всего полета дует ветер с постоянной скоростью u. При каких значениях угла α время полета самолета $t_{макс}$ между городами A и B туда и обратно будет максимальным? Найти максимальное время $t_{макс}$ полета самолета туда и обратно. Ответ обоснуйте математически. Считать, что время разворота самолета в пункте B пренебрежимо мало по сравнению со временем всего полета.

Решение:

Выберем две взаимно перпендикулярные оси системы координат так, чтобы одна из них (ось X) совпала бы с физически выделенным направлением задачи (направлением движения самолета из пункта A в пункт B), а другая ось (ось Y) вместе с осью X составила бы плоскость, параллельную поверхности земли.

Заметим, что результирующая скорость движения самолета должна быть направлена вдоль оси X. Поэтому летчик должен все время направлять самолет под некоторым углом β к оси X (см. рисунок).



$\vec{V}$ - скорость самолёта (результирующая)

$\vec{U}$ - скорость ветра

$\vec{v}$ -скорость самолёта относительно воздуха

Запишем результирующую скорость самолета:

$$\vec{V}_{AB} = \vec{U} + \vec{v}_{AB}$$

Распишем результирующую скорость самолета в проекциях на оси координат, и найдем попутно угол β и результирующую скорость самолета при перелете из пункта A в пункт B:

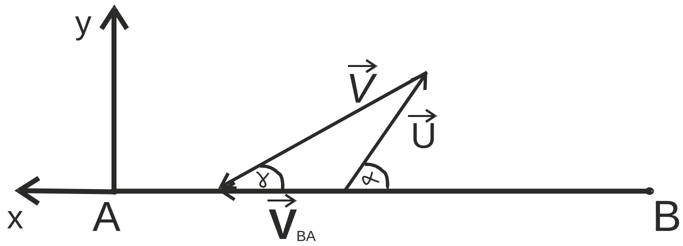
$$V_{ABy} = U\sin\alpha - \mathcal{V}\sin\beta = 0 \;\Rightarrow \sin\beta = \frac{U}{\mathcal{V}}\sin\alpha\,;$$

$$V_{ABx} = U\cos\alpha + \mathcal{V}\cos\beta = U\cos\alpha + \mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha};$$

Найдем время полета самолета из пункта A в пункт B:

$$t_{AB} = \frac{S}{V_{AB}} = \frac{S}{U\cos\alpha + \mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha}};$$

Проведя аналогичные геометрические построения, рассуждения и вычисления, найдем время полета самолета из пункта B в пункт A.



$$\vec{V}_{BA} = \vec{U} + \vec{v}_{BA}$$

$$V_{BAy} = U\sin\alpha - \mathcal{V}\sin\gamma = 0 \;\Rightarrow \sin\gamma = \frac{U}{\mathcal{V}}\sin\alpha;$$

$$V_{BAx} = \mathcal{V}\cos\gamma - U\cos\alpha = \mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha} - U\cos\alpha;$$

$$t_{BA} = \frac{S}{V_{BA}} = \frac{S}{\mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha} - U\cos\alpha};$$

Вычислим полное время полета самолета (туда и обратно):

$$t_{пол} = t_{AB} + t_{BA} = \frac{S}{U\cos\alpha + \mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha}} + \frac{S}{\mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha} - U\cos\alpha}$$

$$= \frac{2S\mathcal{V}\sqrt{1-\frac{U^2}{\mathcal{V}^2}\sin^2\alpha}}{\mathcal{V}^2\left[1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha\right] - U^2\cos^2\alpha} = \frac{2S\mathcal{V}\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mathcal{V}}\right)^2\sin^2\alpha}}{\mathcal{V}^2 - U^2};$$

Анализируя полученное выражение для $t_{пол.}$, видим, что оно будет максимально (при заданных $\mathcal{V}$, S , U) тогда, когда числитель выражения будет максимальным (т.е. когда $\sin\alpha = 0$):

$$t_{пол.max} = t_{пол}(\alpha = 0, \pi);$$

Тогда мы можем вычислить и само время при этих углах направления ветра:

$t_{пол.max} = \frac{2Sv}{\mathcal{V}^2 - U^2}$; Ответ: $t_{max} = \frac{2Sv}{\mathcal{V}^2 - U^2}$, при $\alpha = 0, \pi$;