РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, имеется $2 \cdot 10^4$ способов выбрать первые пять цифр. Следующие три цифры (a_6, a_7, a_8) выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_9. Таким образом, количество наборов из 9-ти цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^7$.

Ответ: $2 \cdot 10^7$.

Задача 2

По условию

$$x^2 = 77n + 71, \quad x^2 = 96m + 73, \ m, n \in N. \tag{1}$$

Приравняв правые части, найдем

$$77n - 96m = 2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{96m+2}{77} = m + \frac{19m+2}{77}.$$

Чтобы числитель последней дроби делился на 77, положим $m = 77t + m_0, t \in \mathrm{Z}$. Перебором или с помощью алгоритма Евклида легко найти, что $m_0 = 8$. Итак, $m = 77t + 8$. Подставим это выражение во второе уравнение (1):

$$x^2 = 96 \cdot 77t + 841.$$

Поскольку $x^2 \le 77^2$, заключаем, что $t = 0$.

Ответ: 29.

Задача 3

Поскольку

$$r_2(a \cdot b) = r_2\big(r_2(a) \cdot r_2(b)\big), r_2(a+b) = r_2\big(r_2(a) + r_2(b)\big),$$

можно далее считать, что числа $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0,1\}$.

Представим первые две буквы полученной строки в виде последовательности $b_1, \dots, b_{10}$: 0001101110.Тогда, предположив, что первые буквы пароля это «РЕ», получим, что $a_1, \dots, a_{10}$: 1000000101, и можно вычислить $y_1, \dots, y_{10}$:

$$b_i = r_2(y_i + a_i) \Leftrightarrow y_i = r_2(b_i + a_i).$$

Получим 1001101011. Используя рекуррентную формулу для членов последовательности $y_5, \dots, y_{10}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} y_5 = r_2(c_0 y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + c_3 y_4) \\ y_6 = r_2(c_0 y_2 + c_1 y_3 + c_2 y_4 + c_3 y_5) \\ y_7 = r_2(c_0 y_3 + c_1 y_4 + c_2 y_5 + c_3 y_6) \\ y_8 = r_2(c_0 y_4 + c_1 y_5 + c_2 y_6 + c_3 y_7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_2) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2) \\ 1 = r_2(c_1) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases}$$

В силу отмеченного ранее можно считать, что $c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$. Тогда закон рекурсии для последовательности $y_1, \dots, y_{35}$ имеет вид:

$$y_{n+4} = r_2(y_n + y_{n+1}).$$

Теперь, используя фрагмент последовательности $y_1, \dots, y_{10}$ можно вычислить и всю оставшуюся последовательность $y_{11}, \dots, y_{35}$: 1100010011010111100010011. Для нахождения пароля остается преобразовать буквы полученной строки в последовательность из 0 и 1, а затем воспользоваться формулой:

$$\mathrm{a_i} = \mathrm{r}_2(\mathrm{y_i} + \mathrm{b_i}).$$

Получим строку $\mathrm{a}_{11}, \dots., a_{35}$: 00000 00011 00101 01101 10010, преобразовывая которую согласно таблице, придем к последовательности букв АГЕНТ. В итоге искомым паролем является слово РЕАГЕНТ.

Ответ: РЕАГЕНТ.

Задача 4

Комментарий

Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, в котором все элементы различны и $a_i \in X_i, i = 1, \dots, n$, называется *трансверсалью* или *системой различных представителей* данного семейства множеств. Как видно из условия, в данной задаче требуется найти все трансверсали семейства множеств $X_1, \dots, X_9$.

Понятие трансверсали семейства множеств связано с понятием *матрицы инцидентности семейства множеств.* Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда матрицей инцидентности данного семейства называется таблица, имеющая n строк и m столбцов, состоящая из нулей и единиц вида:

	x_1	...	x_j	...	x_m
X_1	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_i	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	b_{n1}	...	b_{nj}	...	b_{nm}

где $b_{ij} = 1$ только если $x_j \in X_i$ и $b_{ij} = 0$ – в противном случае. Упорядоченный набор элементов $\left(b_{1j_1}, \dots, b_{nj_n}\right)$, равных 1, в котором элементы лежат в разных столбцах, называется *трансверсалью матрицы инцидентности*. Нетрудно понять, что число трансверсалей семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ равно числу трансверсалей матрицы инцидентности данного семейства.

Решение

Запишем матрицу инцидентности

$$B = \left(b_{ij}\right),\ i = 1, \dots \qquad \dots$$

семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_9$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этой матрице необходимо найти все наборы (трансверсали) вида $b_{1j_1},\ldots$ где $j_1,\ldots$ – некоторая перестановка цифр 1,2,…,9, и все $b_{ij_k}=1,\quad i=1,\ldots$ $\ldots$. Иными словами, ищутся такие наборы из 9 единиц, что все единицы одного набора лежат в разных строках и разных столбцах. Для облегчения поиска переставим в матрице *B* строки и столбцы по следующему правилу: строки с меньшим количеством единиц ставим выше, а столбцы с большим количеством единиц – левее. Таким образом переставленная матрица приведена на рис. 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 1

Поскольку единицы надо выбирать из разных строк и столбцов, сначала следует выбирать 1 из отмеченной пунктиром матрицы 3 на 3 – в ней две трансверсали. Затем выбираются трансверсали в двух отмеченных прямоугольником матрицах 3 на 3 – в каждой из них по 3 трансверсали. Значит, всего 18 трансверсалей.

Ответ: 18 наборов: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 7, 8, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 7, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 9, 8, 7), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 7, 8, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 8, 7, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 9, 8, 7), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 7, 8, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 8, 7, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 9, 8, 7), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 9, 8, 7), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 7, 8, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 8, 7, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 9, 8, 7).

Задача 5

Пусть (a_0, b_0, c_0) – начальное (и неизвестное) состояние замка. Чтобы гарантированно открыть замок, необходимо суметь добавить к начальному состоянию каждую из тысячи комбинаций: (0,0,0), (0,0,1), (0,0,2),…, (9,9,9). Действовать будем так. Пусть необходимо к состоянию замка добавить, например, комбинацию (2,0,6). Для этого приложим карту I два раза, и замок перейдет в состояние (a_0+2, b_0, c_0+6). Если замок не открылся, то приложим карту I еще 8 раз, и замок вернется в начальное состояние (a_0, b_0, c_0). Подобным же образом (возвращаясь каждый раз в начальное состояние) необходимо найти способ добавить и все остальные комбинации.

Отметим следующее:

- одну и ту же карту не имеет смысла прикладывать более 9 раз;
- от порядка прикладывания карт ничего не зависит;
- без карты II обойтись не удастся, поскольку у остальных карт последняя цифра четная;
- двух карт для открытия замка ячейки не хватит: прикладывая каждую из двух карт от 0 до 9 раз, можно добавить к начальному состоянию не более 100 различных комбинаций.

Выясним, можно ли открыть замок наборами карт (I,II,III), (I,II,IV) и (IV,II,III).

Набор (I,II,III). Первую карту приложим A_1 раз, вторую – A_2 раза, третью – A_3 раза. Здесь $A_i \in \{0,1,2,...,9\}$, $i=1,...,3$ Надо проверить, разрешима ли относительно A_1, A_2, A_3 система (везде далее равными считаем числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 10):

$$\begin{cases} A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 7 + A_3 \cdot 9 = d_1, \\ A_1 \cdot 5 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 7 = d_2, \\ A_1 \cdot 8 + A_2 \cdot 9 + A_3 \cdot 6 = d_3, \end{cases}$$

где d_1, d_2, d_3 – произвольный набор цифр. Таких наборов 1000 штук. Значит и левая часть тоже должна принимать 1000 значений. Поскольку каждое A_i принимает всего 10 значений, число значений левой части не превосходит 1000. Чтоб их было 1000 ровно, необходимо и достаточно, чтоб для различных наборов цифр A_1, A_2, A_3 получались различные левые части. Это, в свою очередь, эквивалентно следующему условию

$$\begin{cases} A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 7 + A_3 \cdot 9 = 0, \\ A_1 \cdot 5 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 7 = 0, \\ A_1 \cdot 8 + A_2 \cdot 9 + A_3 \cdot 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \; A_i = 0, \; i = 1,2,3.$$

Но это не так. Так, например, взяв $A_1 = 7, A_2 = 2, A_3 = 1$, также получаем нулевой столбец. Значит карты (I,II,III) не годятся.

Наборы (I,II,IV) и **(IV,II,III)**. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства

$$\begin{cases} A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 7 + A_3 \cdot 3 = 0, \\ A_1 \cdot 5 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 2 = 0, \\ A_1 \cdot 8 + A_2 \cdot 9 + A_3 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} A_1 \cdot 9 + A_2 \cdot 7 + A_3 \cdot 3 = 0, \\ A_1 \cdot 7 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 2 = 0, \\ A_1 \cdot 6 + A_2 \cdot 9 + A_3 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

верны, только когда все A_i равны нулю. Значит эти наборы карт подойдут.

Ответ: (I,II,IV) и (IV,II,III).

Задача 6

Попробуем прочитать полученное сообщение. Для этого разобьём его на группы по пять знаков и произведём обратную замену в соответствии с таблицей:

01111	10000	01000	10101	01110	00100	01000	10010	00101	00111
П	Р	И	Х	О	Д	И	Т	Е	З
00000	00010	10010	10000	00000	00010	00010	11100	00010	00100
А	В	Т	Р	А	В	В	Ь	В	Д 000

Видимо начало нечитаемого текста, ВЬВД000, приходится на тот момент, когда отвлекли агента. Попробуем выписать буквы сообщения, формируя их с конца, чтобы определить место разрыва:

…01ШАФФААРЧАСА

Совмещая полученную информацию, получим такое сообщение:

П Р И Х О Д И Т Е З А В Т Р А В 000 Ч А С А

Теперь необходимо понять, сколько и какие знаки пропущены. Для этого используем информацию об отставании часов. Фраза «часы отстали на 81 секунду» говорит о том, что в сообщение встречается 81 нулей. Агент записал 71 нулей. Значит, среди пропущенных знаков встречается 10 нулей. Посмотрев на слова ЧАСА нетрудно сделать предположение, что пропущенный отрезок может содержать только сочетающиеся с ним числительные: два, три, четыре, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре. Посмотрим, как выглядят короткие слова числительных в закодированном виде (в длинных будет слишком много нулей):

Число	Кодированный вид	Кол-во нулей
ДВА	00100 00010 00000	13
ТРИ	10010 10000 01000	11
ЧЕТЫРЕ	10111 00101 10010 11011 10000 00101	15

С 10-ю нулями слова нет, но три нуля итак остались в раскодированном тексте, значит искомое слово ДВА.

Ответ: ПРИХОДИТЕ ЗАВТРА В ДВА ЧАСА.