11 КЛАСС

1. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям

1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$;
2) $f(1) = 1$;
3) $f(a+b)\cdot(f(a)+f(b)) = 2f(a)\cdot f(b) + +a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи

$$f(a+b)\cdot\big(f(a)+f(b)\big) = 2f(a)\cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1)\cdot\big(f(1)+f(0)\big) = 2f(1)\cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a)\cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$

Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a)\cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

2. Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство

$$0{,}999 < A + B\cdot\sqrt{2} < 1.$$

Решение. Заметим, что если число вида $x + y\cdot\sqrt{2}$, где x, y целые, возвести в целую неотрицательную степень n, то вновь получим число такого же вида, т.е. $\left(x + y\cdot\sqrt{2}\right)^n = x_1 + y_1\cdot\sqrt{2}$, где x_1 и y_1 опять же целые. Положительное число $\sqrt{2}-1$, очевидно, меньше 1. Значит, возводя его в достаточно большую степень, можно получить число сколь угодно малое. Найдем такое натуральное n, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < 0{,}001$. Поскольку $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < \frac{1}{2^n}$, то, очевидно, достаточно взять $n = 10$, так как $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Остается возвести $\sqrt{2}-1$ в 10-ю степень. Находим: $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = \left(17-12\sqrt{2}\right)^2 = 577 - 408\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = \left(\sqrt{2}-1\right)^8\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(577-408\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3363 - 2378\sqrt{2}$. Таким образом, $0{,}999 < 1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^{10} < 1$. Поэтому можно взять $A = -3362, B = 2378$.

Ответ: Например, $A = -3362, B = 2378$.

Замечание. *Приведенная в решении оценка очень грубая. На самом деле, уже* $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 == 577 - 408\sqrt{2} \approx 0{,}000867 < 0{,}001$. *Но* $\left(\sqrt{2}-1\right)^7 \approx 0{,}002 > 0{,}001$.

3. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Боря (не зная расположение корабля Ани) производит «выстрел»: он называет два различных натуральных числа k и m от 1 до 29, и, если отрезок с концами в точках с номерами k и m, совпадает с одной из сторон треугольника Ани, то корабль считается «раненым». Сможет ли Боря, играя обдуманно, гарантированно «ранить» корабль, где бы Аня его ни расположила, сделав не более 134 выстрелов?

Решение: Всего имеется $C_{29}^3 = 3654$ различных треугольников. Один выстрел «ранит» 27 треугольников. Сделав 134 выстрела, удастся «ранить» не более $134\cdot 27 = 3618$ треугольников. Так как $C_{29}^3 > 134\cdot 27$, то 134 выстрелов не хватит, чтобы гарантированно «ранить» корабль.

Ответ: Не сможет.

4. Известно, что уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень x_0. Придумайте хотя бы одно уравнение вида

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d = 0,$$

где a, b, c, d – целые числа и $a \neq 0$, одним из корней которого было бы число

$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1.$$

Решение: Запишем соотношения

$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0 = x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 + x_0$$
$$z \cdot x_0^2 = x_0^4 + 3 \cdot x_0^3 + x_0^2.$$

Правые части можно упростить (привести по модулю $x_0^3 - x_0 - 1$), воспользовавшись тем, что $x_0^3 = x_0 + 1$. В результате получим

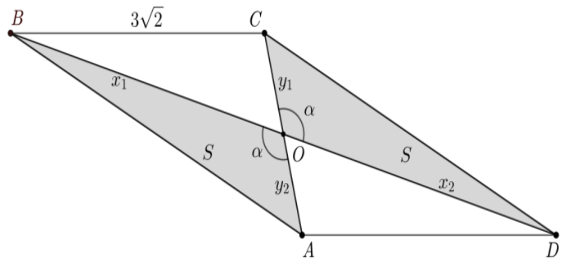
$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0 = 3 \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0^2 = 2 \cdot x_0^2 + 4 \cdot x_0 + 3.$$

Первые два равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений с двумя неизвестными x_0 и x_0^2. Решив ее, найдем $x_0 = \frac{3z-2}{z+7}, x_0^2 = \frac{z^2-3z-1}{z+7}$. Подставив эти соотношения в последнее равенство, получим искомое уравнение относительно z.

Ответ: Например, $z^3 - 5z^2 - 10z - 11 = 0$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1 \sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде



$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \quad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим прежде сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin\angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin\angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC и BCD

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{2},$$
$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

6. Найдите все простые числа, запись которых в системе счисления с основанием 14 имеет вид $101010 \dots 101$ (единицы и нули чередуются).

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010 \dots 101$. Пусть $q = 14$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 197$.

Ответ: 197.

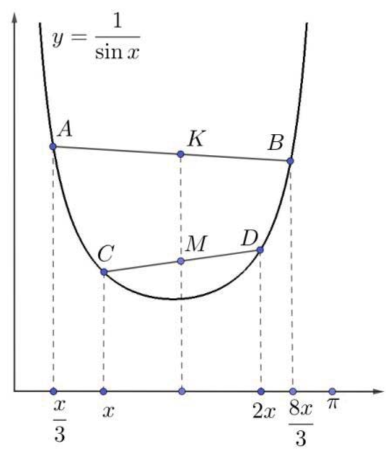
7. Докажите, что для всех $x \in \left(0,\ \frac{3\pi}{8}\right)$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin 2x}.$$

Указание: воспользуйтесь выпуклостью вниз графика функции $f(t) = \frac{1}{\sin t}$ на интервале $(0;\ \pi)$

Решение. Выполним преобразования

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\sin x \sin 2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin 2x + \sin x}{\sin x \sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x}.$$



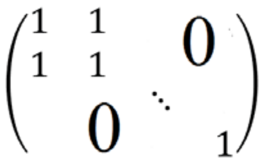
По условию $x \in \left(0,\ \frac{3\pi}{8}\right)$. Следовательно числа $\frac{x}{3}, x, 2x, \frac{8x}{3}$ лежат на интервале $(0;\ \pi)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ее вторая производная $f''(x) = \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ положительна для всех $x \in (0;\ \pi)$, значит на этом интервале функция выпукла вниз. На координатной плоскости отметим точки $A\left(\frac{x}{3}, f\left(\frac{x}{3}\right)\right), B\left(\frac{8x}{3}, f\left(\frac{8x}{3}\right)\right), C(x, f(x))$ и $D(2x, f(2x))$. Левая часть последнего неравенства – сумма ординат точек A и B или, что тоже самое, – удвоенная ордината точки K – середины отрезка AB. Аналогично, правая часть последнего неравенства – удвоенная ордината точки M – середины CD. Поскольку $f(x)$ выпукла вниз, весь отрезок AB расположен «выше» отрезка CD, а значит ордината точки K больше ординаты точки M. Неравенство доказано.

8. В каждую из k ячеек квадратной таблицы $n \times n$ записана единица, а в остальные ячейки – ноль. Найдите максимальное значение k, при котором, независимо от исходного расположения единиц, меняя местами строки между собой и столбцы между собой, можно добиться того, что все единицы окажутся выше побочной диагонали или на ней? (Побочной называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол. На рисунке приведен пример: содержимое ячеек, лежащих выше побочной диагонали или на ней, отмечено жирным.)

Решение: Таблицу размерами $n \times n$ будем обозначать $\mathbf{T}_n$. Очевидно, что для таблицы $\mathbf{T}_2$ искомое максимальное k равно 3. Экспериментируя с таблицей $\mathbf{T}_3$, можно заметить, что $k = 4$ (ниже мы докажем это строго). Сделанные наблюдения позволяют предположить, что для произвольного $n > 1$ максимальное значение k равно $n + 1$. Докажем это. Прежде всего, покажем, что $n + 2$ единицы таблица содержать не может. Для этого приведем контрпример, но сначала вспомним определение трансверсали.

0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	0
1	**1**	0	0
0	0	0	0

Трансверсалью таблицы $\mathbf{T}_n$ называют набор из n ячеек, содержащих 1, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах. Ясно, что если какие-то ячейки образовывали трансверсаль, то и после перестановки строк или столбцов они снова образуют трансверсаль. На рисунке изображена таблица $n \times n$ с $n + 2$ единицами, расположенными на главной диагонали, а также в таблице 2×2 в левом верхнем углу. Такая таблица содержит две трансверсали. В то же время таблица, у которой все 1 лежат на или выше побочной диагонали, содержит не более одной трансверсали. Значит к требуемому в задаче виду таблица на рисунке приведена быть не может. Поэтому $k \leq n + 1$.

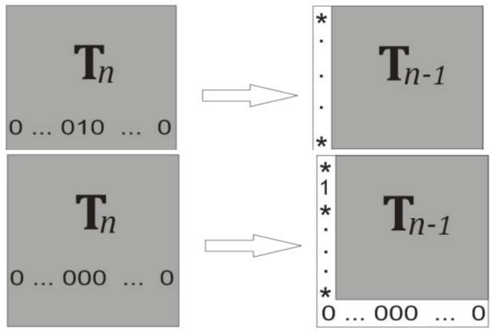


n+2 единицы и две трансверсали

Покажем, что $n + 1$ единицу всегда можно перенести на побочную диагональ или выше. Итак, дана таблица $\mathbf{T}_n$, содержащая $0 < k \leq n + 1$ единиц. В такой таблице обязательно есть строка или ровно с одной 1, или не содержащей единиц вовсе. Рассмотрим эти случаи.

- В таблице $\mathbf{T}_n$ есть строка, содержащая ровно одну 1. Поставим эту строку на последнее место. Затем, переставляя столбцы, переместим эту единственную 1 в крайний левый столбец.

- В таблице $\mathbf{T}_n$ есть строка, содержащая только нули. Поставим эту строку на последнее место. Переставляя столбцы, сделаем так, чтоб в крайнем левом столбце была хоть одна единица.



В каждом случае получена подтаблица $\mathbf{T}_{n-1}$, содержащая, по крайней мере, на одну 1 меньше, чем таблица $\mathbf{T}_n$. С таблицей $\mathbf{T}_{n-1}$ можно выполнить аналогичные преобразования. В результате за $n - 2$ шага придем к таблице $\mathbf{T}_2$, для которой уже установлено, что $k = 3$. Формула $k = n + 1$ доказана.

Ответ: $k = n + 1$ при $n > 1$ и $k = 1$ при $n = 1$.