Вступительный экзамен по математике
Ответы и решения
(Академия ФСБ России, 2015 год)

1. Сравните числа $(\log_2 24\cdot\log_2 36-\log_2 3\cdot\log_2 144)$ и $(\log_3 16)\cdot\log_2 27$. Решение обоснуйте.

2. Решите неравенство $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+2x\le x^2+3.$

3. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi}{x}+\cos\dfrac{2\pi}{x}=1.$

Найдите сумму решений, принадлежащих отрезку $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

4. Решите уравнение

$$3^{4x+1}-5\cdot6^{2x}+2^{4x+1}=0.$$

5. Первый член геометрической прогрессии равен 1. Сумма квадратов её первых трёх членов в два раза больше суммы первых шести членов. Найдите знаменатель прогрессии.

6. Бассейн может наполняться через три трубы. Время наполнения бассейна трубами при одновременном включении составляет 6 часов. Если бы одна первая труба подавала воду в течении шести часов, затем была включена вторая, а ещё через три часа подключена и третья, то время наполнения бассейна (с момента включения первой трубы) составило бы 12 часов. Найдите отношение производительностей первой и третьей трубы.

7. Отношение высоты прямоугольного треугольника *ABC*, проведённой из вершины прямого угла, к гипотенузе равно $\frac{12}{25}$. Для треугольника *ABC* найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\cdot x+a+a^2=2\sqrt{x+1}$$

имеет ровно одно решение?

РЕШЕНИЯ

1. РЕШЕНИЕ

Преобразуем:

$\log_2 24 \cdot \log_2 36 - \log_2 3 \cdot \log_2 144 = \log_2(2^3 \cdot 3) \cdot \log_2(2^2 \cdot 3^2) - \log_2 3 \cdot \log_2(2^4 \cdot 3^2) =$

$= (3 + \log_2 3)(2 + 2\log_2 3) - \log_2 3 \cdot (4 + 2\log_2 3) = 4\log_2 3 + 6;$

$(\log_3 16) \cdot \log_2 27 = 12;$

Сравним: $4\log_2 3 + 6$ и $12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ сравнить: $\log_2 3$ и $3/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ сравнить: 3 и $2^{3/2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ сравнить: 3^2 и 2^3. Следовательно, **первое число больше второго**.

2. РЕШЕНИЕ

Заменим: $t = x^2 - 2x + 1$.

Получим неравенство: $\dfrac{3}{t} - t - 2 \le 0$.

Решая методом интервалов: $t \in [-3;0) \cup [1;+\infty)$.

Учитывая, что $t \ge 0$, получим $x^2 - 2x + 1 \ge 1$.

Отсюда $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

3. РЕШЕНИЕ

Заменим: $t = \dfrac{\pi}{x}$.

Получим уравнение: $\sin t + \cos 2t = 1.$

Используя формулу косинуса двойного угла, получим $\sin t - 2 \cdot \sin^2 t = 0.$

Следовательно, $\sin t = 0$ или $\sin t = \dfrac{1}{2}$,

$$t = \pi \cdot n,\ t = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi \cdot n,\ t = \frac{5 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot \pi \cdot n,\ n \in Z.$$

Тогда $x = \dfrac{1}{n}$, $x = \dfrac{6}{12n+1}$, $x = \dfrac{6}{12n+5}$.

Учитывая условие $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$, получим $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{6}{5}$.

Ответ: $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{6}{5}$, $\sum=\frac{27}{10}$.

4. РЕШЕНИЕ

$3^{4x+1}-5\cdot 6^{2x}+2^{4x+1}=0 \Leftrightarrow 3\cdot 9^{2x}-5\cdot 9^{x}\cdot 4^{x}+2\cdot 4^{2x}=0$.

Разделим на 4^{2x} и сделаем замену $t=\left(\frac{9}{4}\right)^{x}$.

Получим уравнение $3\cdot t^2-5\cdot t+2=0$.

Отсюда $t=1$ или $t=\frac{2}{3}$.

Далее находим $x=0$ или $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=0$ **или** $x=-\frac{1}{2}$.

5. РЕШЕНИЕ

Ясно, что квадраты членов геометрической прогрессии снова образуют геометрическую прогрессию. Пользуясь формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, получим:

$$\frac{1-q^6}{1-q^2}=2\cdot\frac{1-q^6}{1-q}.$$

Отсюда находим $q=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $q=-\frac{1}{2}$.

6. РЕШЕНИЕ

Обозначим x,y,z - производительности первой, второй и третьей трубы соответственно, V – объём бассейна. Тогда из условия задачи получим систему уравнений: $\begin{cases} 6x+6y+6z=V \\ 12x+6y+3z=V \end{cases}$.

Отсюда находим: $\frac{x}{z}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

7. РЕШЕНИЕ

Обозначим *a, b* – катеты, *c* – гипотенуза треугольника *ABC, h* – высота, проведённая и вершины прямого угла. По условию $h = 12k, c = 25k.$ Пользуясь теоремой Пифагора и формулами площади треугольника, получим систему уравнений: $\begin{cases} a\cdot b = 12\cdot 25\cdot k^2 \\ a^2 + b^2 = 25^2\cdot k^2 \end{cases}$.

Отсюда находим $a = 15, b = 20$ или $a = 20, b = 15$. Пользуясь формулами для радиуса описанной и вписанной окружностей для прямоугольного треугольника $R = \dfrac{c}{2}, r = \dfrac{a+b-c}{2}$ найдём $R = \dfrac{25x}{2}, r = 5x$. Следовательно, $\dfrac{R}{r} = 2{,}5$.

Ответ: $\dfrac{R}{r} = 2{,}5$.

8. РЕШЕНИЕ

Обозначим $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $t \geq 0, x = t^2 - 1$.

После преобразований получим систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} a\cdot t^2 - 2t + a^2 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

У полученной системы единственное решение возможно в следующих случаях:

1) $a = 0$. Отсюда $t = 0$ и, следовательно, $x = -1$ – единственное решение.
2) $a \neq 0$. Разделим первое уравнение системы на a:

$$\begin{cases} t^2 - \dfrac{2}{a}t + a = 0 \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

Обозначим $f(t) = t^2 - \dfrac{2}{a}t + a$.

Единственное решение у системы будет в следующих случаях:

А) $t_1 \le 0 < t_2$, где t_1, t_2 – корни многочлена $f(t)$

Это равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f(0) < 0 \\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ t_в \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Отсюда получаем $a < 0$.

Б) $D = 0, t \ge 0$.

$$D = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0.$$

Учитывая $t \ge 0$ получаем $a = 1$.

Ответ: $a \le 0, a = 1.$