

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Про составленный из цифр 10-значный пароль $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр $a_1 + \dots + a_5$ делится на 5, 2) сумма всех цифр пароля $a_1 + \dots + a_{10}$ делится на 10. Сколько таких паролей?

2. Найдите натуральное число x , не превосходящее 85 такое, что при делении чисел x^{15} и x^{23} на 85 в остатке получится соответственно 23 и 28.

3. Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом. Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей из задачи 6 (считается, что $E=\ddot{E}$). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность a_1, \dots, a_7 где $a_i \in \{0;1\}$. Затем Шляпник построил еще одну последовательность y_1, \dots, y_{35} , также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности y_1, y_2, y_3, y_4 и выбрал четыре неотрицательных целых числа c_1, c_2, c_3, c_4 . Оставшиеся члены последовательности y_5, \dots, y_{35} он подсчитал по формуле $y_{n+4} = r_2(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3})$, где $r_2(b)$ – остаток от деления числа b на 2. Затем он вычислил $b_i = r_2(a_i + c_i)$, $i = 1, \dots, 7$. Получившуюся последовательность b_1, \dots, b_7 Шляпник разбил на фрагменты длиной 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку **ГОШРОХБ**. Помогите ему определить пароль.

логин: Шляпник
пароль: PE*****

4. Даны множества:

$$X_1 = \{1, 6, 9\}, X_2 = \{2, 7\}, X_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, X_4 = \{2, 3, 4, 6, 9\}, X_5 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$X_6 = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}, X_7 = \{7, 9\}, X_8 = \{2, 6, 7, 8\}, X_9 = \{2, 9\}.$$

Сколько существует наборов *различных* цифр $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ таких, что $a_i \in X_i$?

Предъявите все эти наборы.

5. Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр (u, v, w) , отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры $(7, 5, 6)$, на второй – $(9, 8, 3)$, на третьей – $(3, 9, 2)$, на четвертой – $(1, 4, 8)$. При прикладывании карты с информацией (a, b, c) к считывающему устройству банковской ячейки, ее кодовый замок из состояния (i, j, k) переходит в состояние $(i+a, j+b, k+c)$. (Если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10.) Как только замок оказывается в состоянии (u, v, w) , он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации (u, v, w) и начального состояния замка?

6. Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей (считается, что $E=\ddot{E}$). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приеме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлек агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 85 секунд, а в блокноте у агента

