Условия и решения заданий XXII межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии 2012-2013 учебного года.

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех регионов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса.

9 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Известно, что двадцатизначное число $A = 2013x2013x2013x2013x$ делится нацело на 143. Найдите все возможные значения цифры x. Решение обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $143 = 13 \cdot 11$. Используя признак делимости на 11 (знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11) получаем, что число A делится на 11 при любой цифре x. Представим A в виде:

$$2013x(10^{15}+10^{10}+10^{5}+1) = 2013x(10^{5}+1)(10^{10}+1).$$

Найдем:

$$r_{13}(10^5) = r_{13}((-3)^5) = r_{13}(-9\cdot 9\cdot 3) = r_{13}(-3\cdot 3) = 4,$$

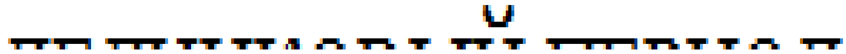
$$r_{13}(10^{10}) = r_{13}(16) = 3$$

где $r_{13}(a)$ – остаток от деления числа a на 13. Следовательно, на 13 должно делиться число $2013x$. Выполняя деление «уголком», находим $x = 7$.

Ответ: 7.

Задача 2.

При передаче сообщения по факсу, произошел сбой. В результате на листе было напечатано (изображение увеличено)



Восстановите текст (ответ обоснуйте). Известно, что исходный шрифт выглядел так

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я.

Решение:

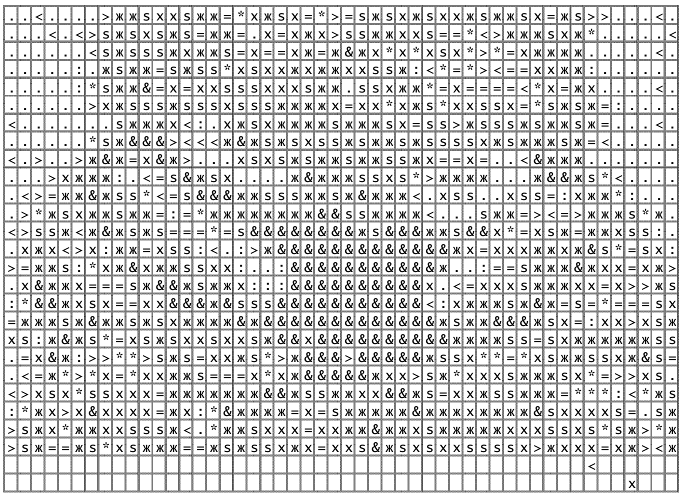
Сопоставим каждому изображенному символу возможные соответствующие ему буквы алфавита и затем попробуем, выбирая по одной букве из каждого столбца, прочитать исходное сообщение:

Д	Б	**Д**	И	**И**	**К**	**О**	**В**	**Ы**	**Й**	Б	Б	В	**И**	**О**	**Д**
Л	Г	Л	**Н**	Н			Р			Г	Г	**Р**	Н		Л
	Е		Ч	Ч						**П**	**Е**		Ч		
			Ц	Ц									Ц		

Ответ: ЛЕДНИКОВЫЙ ПЕРИОД.

Задача 3.

Ксюша вышивала крестиком. Внутри вышивки размером 27 на 50 клеточек она скрыла послание Сереже. В сообщении она заменила каждую букву парой цифр, соответствующих их номерам в алфавите: А=01, Б=02, …, Я=33, и пронумеровала полученные цифры (слева на право): 1,2,3, …. . Затем выбрала натуральное число *p*. Для каждой цифры послания с номером *k* крестик нужного цвета вышивался в клетке с номером $p \cdot k$.



Цвета	
1	x
2	.
3	&
4	:
5	*
6	>
7	<
8	s
9	=
0	ж

Рис. 1

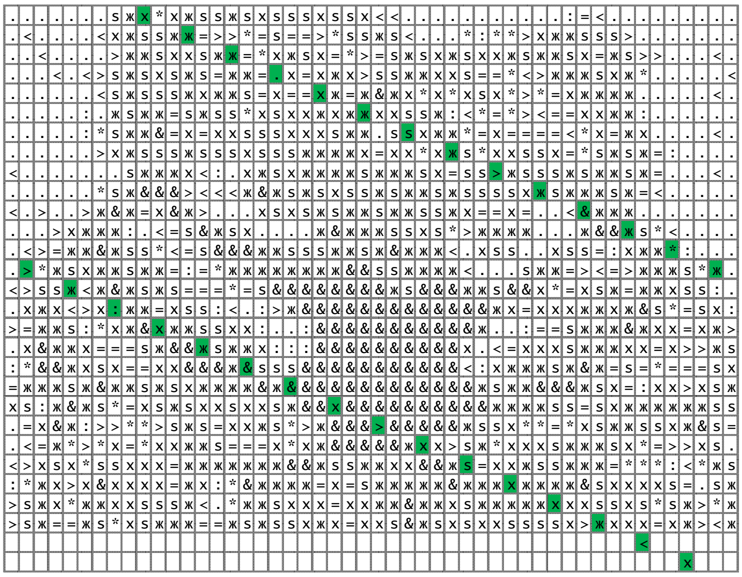
Нужный цвет определялся по рис. 1, а клетки в схеме нумеруются *слева направо снизу вверх* (например, левая нижняя клетка имеет номер 1, а клетка над ней - 51). Затем Ксюша почти завершила оставшуюся часть картинки, не успев вышить две нижние строки. Прочитайте скрытое послание.

Решение:

Найдем расстояние между известными символами сообщения – 47 крестиков. А это значит, что число p из условия задачи как раз равно 47. Теперь остается просто выписать последовательность символов (идя снизу вверх и начиная со второго, брать каждый 47-ой) и переписать ее буквами.

x	<	ж	x	x	s	x	>	x	&	&	ж	X	:	ж	>	ж	*	ж	&	ж	>	ж	s	ж	x	.	ж	ж	x
1	7	0	1	1	8	1	6	1	3	3	0	1	4	0	6	0	5	0	3	0	6	0	8	0	1	2	0	0	1
П		А		Р		О		Л		Ь		М		Е		Д		В		Е		Ж		А		Т		А	

На рисунке ниже цветами выделены необходимые символы.



Ответ: Пароль медвежата.

Задача 4.

Для записи текста используются только заглавные буквы, пробелы, точки и запятые – всего различных 36 символов. При зашифровании каждый символ заменили числом от 0 до 35, в соответствии с порядком в «расширенном» алфавите. Затем полученную последовательность чисел разбили на пары, а каждую пару заменили по правилу: пару (a_1, a_2) заменили на пару $\left(r_{36}(a_1 n), r_{36}(a_1 k + a_2 m)\right)$, где $r_{36}(x)$ – остаток от деления числа x на 36, а n, k и m – заранее выбранные целые числа от 0 до 35. Найдите все наборы чисел n, k и m, при которых разные пары переходят в разные (это необходимо для возможности расшифрования текста). Сформулируйте правило расшифрования для случая $n = k = m = 17$. Решение обоснуйте.

Решение:

Условие задачи равносильно тому, что при «правильно» выбранных n, k и m система уравнений

$$\begin{cases} r_{36}(a_1 n) = y_1, \\ r_{36}(a_1 k + a_2 m) = y_2, \end{cases}$$

имеет единственное решение (a_1, a_2) при любой паре (y_1, y_2). В этом случае разные пары (a_1, a_2) будут переходить в разные (y_1, y_2), иначе получим противоречие с единственностью решения такой системы при некоторой паре (y_1, y_2). Обратно, если разные пары (a_1, a_2) переходят в разные пары (y_1, y_2), то при любой паре (y_1, y_2) такая система либо имеет единственное решение, либо не имеет решений. Однако в то же время количество различных пар (a_1, a_2) равно 36^2, а значит количество соответствующих им различных пар (y_1, y_2) по крайней мере 36^2, но ясно, что их число не превосходит 36^2, а стало быть оно в точности равно 36^2. Отсюда следует, что для любой пары (y_1, y_2) рассматриваемая система имеет решение и при том только одно.

Можно показать, что уравнение $r_{36}(a_1 n) = y_1$ имеет единственное решение a_1 при любом y_1 тогда и только тогда, когда n и 36 взаимнопросты. Следовательно, если n и 36 взаимнопросты, то из данного уравнения значение a_1 находится однозначно и тогда второе уравнение системы примет вид: $r_{36}(a_2 m) = r_{36}(y_2 - a_1 k)$.

Аналогично, оно имеет единственное решение относительно a_2 при любом y_2 тогда и только тогда, когда m и 36 взаимнопросты, при этом значение параметра k на это свойство никак не влияет. Таким образом, однозначное расшифрование возможно при выборе взаимнопростых с 36 числах n, m и произвольном k.

Пусть теперь $n = k = m = 17$. Тогда для нахождения (a_1, a_2) нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} r_{36}(17a_1) = y_1, \\ r_{36}\big(17(a_1 + a_2)\big) = y_2. \end{cases}$$

Легко видеть, что $r_{36}(17 \cdot 17) = 1$. Отсюда легко проверить, что $a_1 = r_{36}(17y_1)$ и $a_2 = r_{36}(17y_2 - 17y_1)$.

Ответ: $a_1 = r_{36}(17y_1)$, $a_2 = r_{36}(17y_2 - 17y_1)$.

Задача 5.

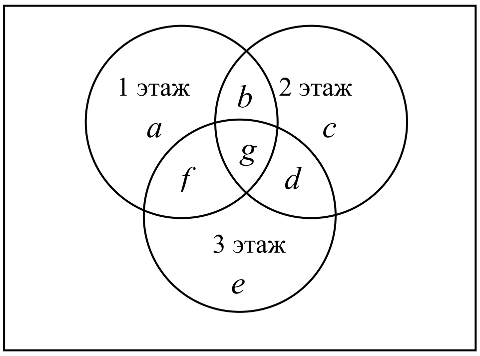
Помещения здания «Криптохауз» открываются пластиковыми карточками, на которых записаны кодовые комбинации из нулей и единиц длины 8. Коды для помещений на 1 этаже имеют вид (10****0*), на втором - (**1*1***), на третьем - (1****0**). На местах, помеченных символом «*», может быть и 0, и 1. Каждый из 45 работников Криптохауза имеет ровно по одному ключу. Найдите количество работников, имеющих доступ ровно на один этаж, если получена информация о наличии ключей существующих типов (см. табл. 1).

Вид	Кол-во
(101*1*0*)	6
(1*1*10**)	9
(10***00*)	9
(101*100*)	2

Табл.1

Решение:

Легко заметить, что три типа ключей связаны диаграммой Эйлера (см. рис.) Соответствующие области обозначим буквами. По условию задачи требуется найти *a*+*c*+*e*. Согласно табл. 1 имеем:



$$a+b+c+d+e+f+d+g=45,$$

$$b+g=6,$$

$$d+g=9,$$

$$f+g=9,$$

$$g=2.$$

Откуда находится $a+c+e=25$.

Ответ 25.

Задача 6.

При раскопках стоянки древних хакеров археологами были обнаружены следующие предметы, вероятно, использовавшиеся для шифрования информации: линейка (см. рис. 2); и катушка с белой нитью, на которую были нанесены черные метки. Расстояния между последовательными метками, измеренные в единицах деления линейки,

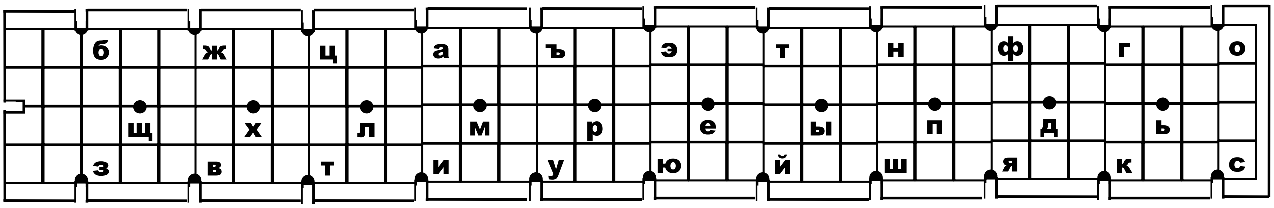
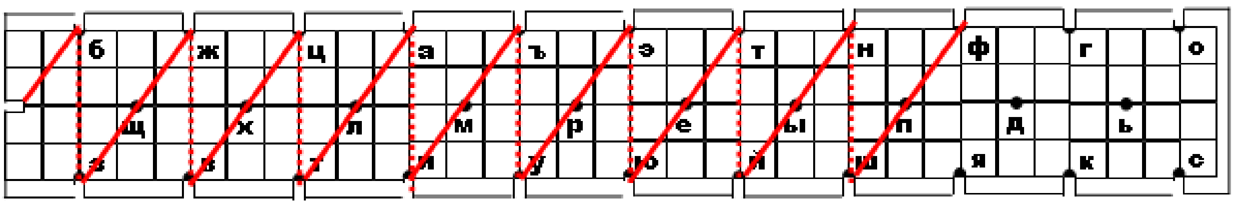


Рис. 2

равны 74.5, 85, 90, 90, 86, 18. Прочитайте сообщение, зашифрованное хакерами.

Решение:

Анализ линейки на рис. 1 позволяет догадаться о способе наматывания нити для осуществления шифрования. Наматывание нити производилось так, что с оборотной стороны линейки нить ложилась вертикально, а с лицевой – диагонально. В этом случае возможны два варианта наматывания нити: от «б» к «з» или наоборот.



Перебором двух вариантов устанавливаем, что наматывание нити осуществлялось по вертикали сверху вниз, по диагонали – снизу вверх, а скрытым текстом являлось слово «фишинг».

Ответ: фишинг.

10 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Известно, что десятизначное число $A = 2013x2013y$ делится нацело на 121. Найдите все возможные пары цифр (x, y). Решение обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $121 = 11 \cdot 11$. Используя признак делимости на 11 (знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11) получаем, что число A делится на 11 только при условии $x = y$. Действительно, знакопеременная сумма цифр числа A равна:

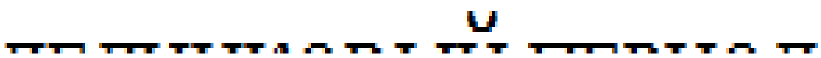
$$y + 1 + 2 + 3 + 0 - (3 + 0 + x + 1 + 2) = y - x.$$

Но y и x являются цифрами, следовательно $|y - x| < 11$, поэтому делимость возможна тогда и только тогда, когда $x = y$. Отсюда, число A имеет вид $2013x(10^5 + 1)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $10^5 + 1$ делится на 11, но не делится на 121. Следовательно, на 11 должно делиться число $2013x$. Используя признак делимости на 11, находим, что $x = 0$, а значит и $y = 0$.

Ответ: (0,0).

Задача 2.

При передаче сообщения по факсу, произошел сбой. В результате на листе было напечатано (изображение увеличено)



Восстановите текст (ответ обоснуйте). Известно, что исходный шрифт выглядел так

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я.

Решение:

Сопоставим каждому изображенному символу возможные соответствующие ему буквы алфавита и затем попробуем, выбирая по одной букве из каждого столбца, прочитать исходное сообщение:

Д	Б	Д	И	И	К	О	В	Ы	Й	Б	Б	В	И	О	Д
Л	Г	Л	Н	Н			Р			Г	Г	Р	Н		Л
	Е		Ч	Ч						П	Е		Ч		
			Ц	Ц									Ц		

Ответ: ЛЕДНИКОВЫЙ ПЕРИОД.

Задача 3.

В картинке, вышитой «крестиком», Ксюша скрыла послание Сереже. Буквы она заменила парами цифр в соответствии с алфавитным порядком: А=01, Б=02, … , Я=33. Затем Ксюша выбрала простое число *p*. Для цифры послания с номером *k* крестик нужного цвета вышивался в клетке с номером *pk*. Нужный цвет определялся по рис.1, а клетки в схеме нумеруются *слева направо снизу вверх* (например, левая нижняя клетка имеет номер 1, а клетка над ней - 51). Затем Ксюша завершила оставшуюся часть картинки. Прочитайте скрытое послание.

Цвета	
1	x
2	.
3	&
4	:
5	*
6	>
7	<
8	s
9	=
0	ж

Рис. 1

.	.	.	.	.	.	.	s	ж	x	*	x	ж	s	s	ж	s	x	s	s	s	x	s	s	x	<	<	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	:	=	<	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	<	.	.	.	.	<	x	ж	s	s	ж	ж	=	>	>	*	=	s	=	=	>	*	s	s	ж	s	<	.	.	.	*	:	*	*	>	x	ж	ж	s	s	s	>	.	.	.	.	.	.	.
.	.	<	.	.	.	.	>	ж	ж	s	x	x	s	ж	ж	=	*	x	ж	s	x	=	*	>	=	s	ж	s	x	ж	s	x	x	ж	s	ж	ж	s	x	=	ж	s	>	>	.	.	.	<	.
.	.	.	<	.	<	>	s	ж	s	x	s	ж	s	=	ж	ж	=	.	x	=	x	ж	x	>	s	s	ж	ж	x	x	s	=	=	*	<	>	ж	ж	ж	s	x	ж	*	.	.	.	.	.	<
.	.	.	.	.	.	<	s	ж	s	s	s	ж	x	ж	ж	s	=	x	=	=	x	ж	=	ж	&	ж	x	*	x	*	x	s	x	*	>	*	=	x	ж	ж	ж	ж	.	.	.	.	.	<	.
.	.	.	.	.	:	.	ж	s	ж	ж	=	s	ж	s	s	*	x	s	x	x	ж	x	ж	ж	x	x	s	s	ж	:	<	*	=	*	>	<	=	=	x	x	ж	ж	:	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	:	*	s	ж	ж	&	=	x	=	x	x	s	s	s	x	x	x	s	ж	ж	.	s	s	x	ж	ж	*	=	x	=	=	=	=	<	*	x	=	ж	x	.	.	.	.	<	.
.	.	.	.	.	.	>	x	ж	s	s	s	ж	s	s	s	x	s	s	s	ж	ж	ж	ж	x	=	x	x	*	x	ж	s	*	x	x	s	s	x	=	*	s	ж	s	ж	=	:	.	.	.	.
<	.	.	.	.	.	.	.	s	ж	ж	ж	x	<	:	.	x	ж	s	x	ж	ж	ж	ж	s	ж	ж	ж	s	x	=	s	s	>	ж	s	s	s	ж	s	ж	ж	s	ж	=	.	.	.	<	.
.	.	.	.	.	.	*	s	ж	&	&	&	>	<	<	<	ж	&	ж	s	ж	s	x	s	s	ж	s	ж	ж	s	ж	s	s	s	s	x	ж	s	ж	ж	ж	s	ж	=	<	.	.	.	.	.
<	.	>	.	.	>	ж	&	ж	=	x	&	ж	>	.	.	.	x	s	x	s	ж	s	ж	ж	s	ж	ж	s	s	ж	x	=	=	x	=	.	.	<	&	ж	ж	ж	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	>	x	ж	ж	ж	:	.	<	=	s	&	ж	s	x	.	.	.	.	ж	&	ж	ж	ж	s	s	x	s	*	>	ж	ж	ж	ж	.	.	.	ж	&	&	ж	s	*	<	.	.	.	.
.	<	>	=	ж	ж	&	ж	s	s	*	<	=	s	&	&	&	ж	ж	s	s	s	ж	ж	s	ж	&	ж	ж	ж	<	.	x	s	s	.	.	x	s	s	=	:	x	ж	ж	*	:	.	.	.
.	>	*	ж	s	x	ж	ж	s	ж	ж	=	:	=	*	ж	ж	ж	ж	ж	ж	ж	ж	&	&	s	s	ж	ж	ж	ж	<	.	.	.	s	ж	ж	=	>	<	=	>	ж	ж	ж	s	*	ж	.
<	>	s	s	ж	<	ж	&	ж	s	ж	s	=	=	=	*	=	s	&	&	&	&	&	&	&	&	ж	s	&	&	&	ж	ж	s	&	&	x	*	=	x	s	ж	=	ж	ж	x	s	s	:	.
.	x	ж	x	<	>	x	:	ж	ж	=	x	s	s	:	<	.	:	>	ж	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	ж	x	=	x	x	x	ж	ж	x	ж	&	s	*	=	s	x	:
>	=	ж	ж	s	:	*	x	ж	&	x	ж	ж	s	s	x	x	:	.	.	:	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	ж	.	.	:	=	=	s	ж	ж	ж	&	ж	x	x	=	x	ж	>
.	x	&	ж	ж	x	=	=	=	s	ж	&	&	ж	s	ж	ж	x	:	:	:	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	x	.	<	=	x	x	x	s	ж	ж	ж	x	x	=	x	>	>	ж	s
:	*	&	&	ж	x	s	x	=	=	x	x	&	&	&	ж	&	s	s	s	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	<	:	x	ж	ж	ж	s	ж	&	ж	=	s	=	*	=	=	=	s	x
=	ж	ж	ж	s	ж	&	ж	ж	s	ж	s	x	ж	ж	ж	ж	&	ж	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	ж	s	ж	ж	&	&	&	ж	s	x	=	:	x	x	>	x	s	ж
x	s	:	ж	&	ж	s	*	=	x	s	ж	s	x	x	s	x	x	s	ж	&	&	x	&	&	&	&	&	&	&	&	&	&	ж	ж	ж	ж	s	s	=	s	x	ж	ж	ж	ж	ж	ж	s	s
.	=	x	&	ж	:	>	>	*	*	>	s	ж	s	=	x	x	ж	s	*	>	ж	&	&	&	>	&	&	&	&	&	ж	s	s	x	*	*	=	*	x	s	ж	ж	s	s	x	ж	&	s	=
.	<	=	ж	*	>	*	x	=	*	x	x	ж	ж	s	=	=	=	x	*	x	ж	&	&	&	&	&	ж	x	x	>	s	ж	*	x	x	x	s	ж	ж	ж	s	x	*	=	>	>	x	s	.
<	>	x	s	x	*	s	s	x	x	x	=	ж	ж	ж	ж	ж	ж	ж	&	&	ж	s	s	ж	ж	x	x	&	&	ж	s	=	x	x	ж	s	s	ж	ж	ж	=	*	*	*	:	<	*	ж	s
:	*	ж	x	>	x	&	x	x	x	x	=	ж	x	:	*	&	ж	ж	ж	ж	=	x	=	s	ж	ж	ж	ж	ж	&	ж	ж	ж	x	ж	ж	ж	ж	&	s	x	x	x	x	s	=	.	s	ж
>	s	ж	x	*	ж	ж	x	x	s	s	s	ж	<	.	*	ж	ж	s	x	x	x	=	x	x	ж	ж	&	ж	ж	x	s	ж	ж	ж	ж	ж	x	x	x	s	s	x	s	*	s	ж	>	*	ж
>	s	ж	=	=	ж	s	*	x	s	ж	ж	ж	=	=	ж	s	ж	s	s	x	ж	x	=	x	x	s	&	ж	s	x	s	x	x	s	s	s	s	x	>	ж	x	x	x	=	x	ж	>	<	ж
<	ж	s	=	:	=	=	s	x	x	x	s	x	x	s	&	ж	s	*	*	<	=	x	>	*	=	s	&	s	x	s	x	=	x	=	=	s	s	ж	ж	ж	ж	x	<	x	x	x	x	>	s
>	ж	s	x	*	=	=	x	x	=	=	>	>	*	>	x	s	ж	s	x	>	:	>	>	*	<	x	&	ж	x	=	>	*	*	x	s	ж	ж	x	x	=	*	*	>	x	=	x	=	*	s

Решение:

Так как буквы русского алфавита представлены их номерами алфавита, то первый символ послания может быть только «ж», «х», «.» или

«&». Рассмотрим позиции с простым номером в первой строке, в которых записаны именно эти символы: 2, 29, 37 и 47. Значит, данные числа могут являться кандидатами на выбранное Ксюшей число p, поскольку на этих местах могут находиться цифры послания с номером $k = 1$. Начинаем выбирать клетки картинки, двигаясь по строкам слева направо снизу вверх с шагом, равным p. Как только на нечетном месте встречается неподходящий символ (т.е. отличный от «ж», «х», «.», «&»), делаем вывод, что p выбрано не верно (см. табл. 1).

Табл. 1

2	х	ж	=																											
	1	0	9																											
	И		?																											
29	ж	s	s																											
	0	8	8																											
	Ж		?																											
37	ж	>	ж	>	ж	=	х	*	ж	*	s																			
	0	6	0	6	0	9	1	5	0	5	8																			
	Е		Е		З		Н		Д		?																			
47	х	<	ж	х	х	s	х	>	х	&	&	ж	х	:	ж	>	ж	*	ж	&	ж	>	ж	s	ж	х	.	ж	ж	х
	1	7	0	1	1	8	1	6	1	3	3	0	1	4	0	6	0	5	0	3	0	6	0	8	0	1	2	0	0	1
	П		А		Р		О		Л		Ь		М		Е		Д		В		Е		Ж		А		Т		А	

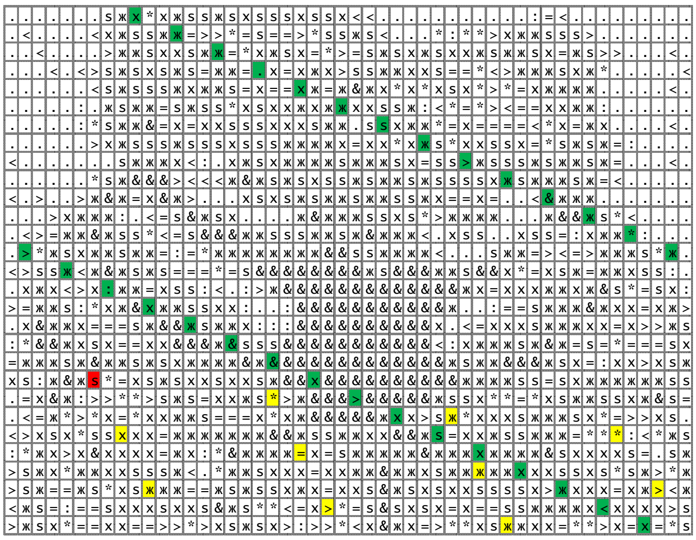


Рис. 2

В рис. 2 цветами выделены «цвета» (согласно рис. 1) для значений p, равных 37 и 47.

Ответ: ПАРОЛЬ МЕДВЕЖАТА.

Задача 4.

Пусть $\boldsymbol{a_{ij}}$ – число, стоящее в строке с номером $\boldsymbol{i}$ и столбце с номером $\boldsymbol{j}$ квадратной таблицы $\boldsymbol{A}$ (табл. 2). По таблице $\boldsymbol{A}$ построена таблица $\boldsymbol{B}$, в строке с номером $\boldsymbol{i}$ и столбце с номером $\boldsymbol{j}$ которой стоит выражение $x^{2^{a_{ij}}}$. Набор из десяти клеток таблицы будем называть «правильным», если в нем присутствуют ровно по одной клетке из каждого столбца и каждой строки. Вычисляются произведения элементов, входящих в правильные наборы. Результатом являются выражения вида x^n. Найдите наибольшую возможную степень правильного набора (число n) и число правильных наборов степени 1023.

Табл. 2

5	6	7	8	0	0	0	0	0	0
6	5	8	7	0	0	0	0	0	0
7	8	5	6	0	0	0	0	0	0
8	7	6	5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	9	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	9	0	0	0
0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	3	4	2
0	0	0	0	0	0	0	4	2	3

Решение:

Наибольшая возможная степень правильного набора получается при перемножении элементов, стоящих в таблице $\boldsymbol{B}$ на местах, соответствующих местам в таблице $\boldsymbol{A}$, которые в табл. 3 выделены жирным шрифтом. Поэтому наибольшая степень равна $4 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2^4 = 2608$.

Табл. 3

5	6	7	**8**	0	0	0	0	0	0
6	5	**8**	7	0	0	0	0	0	0
7	**8**	5	6	0	0	0	0	0	0
8	7	6	5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**9**	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	**9**	0	0	0
0	0	0	0	1	**9**	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2	3	**4**
0	0	0	0	0	0	0	3	**4**	2
0	0	0	0	0	0	0	**4**	2	3

Чтобы решить вторую часть задачи, заметим, что верно следующее:

$$1023 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^9.$$

Отсюда следует, что искомый коэффициент равен числу таких наборов по 10 элементов, стоящих в различных строках и столбцах в табл. 3, в которых каждое число от 0 до 9 встречается по одному разу. Любой такой набор распадается на 3 набора: набор с числами 2, 3, 4 в нижнем правом квадрате, набор с числами 0, 1, 9 в центральном квадрате и набор с числами 5, 6, 7, 8 в верхнем левом квадрате.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что в каждом из указанных квадратов соответственно имеется 3, 3 и 8 таких наборов, следовательно, общее число наборов равно $3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$.

Ответ: 2608; 72.

Задача 5.

При установке соединения между компьютерами **A** и **B** используется следующий вариант т.н. «процедуры рукопожатия»: 1) **A** выбирает натуральное число x, не большее 5250, и пересылает **B** значение функции $F(x)$, а затем **B** пересылает **A** число $F(x+1)$; 2) теперь **B** выбирает натуральное число y, не большее 5250, и пересылает **A** число $F(y)$, а **A** пересылает в ответ $F(y+1)$. При этом, $F(t) = r_{5251}(t^3)$, где $r_{5251}(t)$ - остаток от деления целого числа t на число 5251. Найдите числа x и y, если в сети последовательно наблюдались числа: 506, 519, 229 и 231. *Замечание*: известно, что в компьютерах **A** и **B** реализована процедура, решающая уравнение $r_{5251}(x^3) = a$, где x – неизвестное целое число, $0 \le x \le 5250$, и число 5251 выбрано так, что это уравнение имеет единственное решение.

Решение:

Исходя из условия задачи, составим систему уравнений в общем виде для z, где z - это либо x, либо y:

$$\begin{cases} r_N(z^3) = c_1, \\ r_N((z+1)^3) = c_2, \end{cases} \quad \begin{cases} r_N(z^3) = c_1, \\ r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2, N - известны. Заметим, что

$$r_N(c_2 - c_1 + 2) = r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - z^3 + 2) = r_N(3z^2 + 3z + 3),$$

$$r_N(c_2 + 2c_1 - 1) = r_N(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 + 2z^3 - 1) = r_N(3z^3 + 3z^2 + 3z),$$

тогда получаем

$$r_N(z \cdot (c_2 - c_1 + 2)) = r_N(c_2 + 2c_1 - 1).$$

Для первой пары чисел 506, 519 получаем, что:

$$c_2 + 2c_1 - 1 = 1530;$$

$$c_2 - c_1 + 2 = 15;$$

тогда, исходя из этого, имеем: $x = \frac{1530}{15} = 102$. Для второй пары чисел 229, 231 получаем $y = 72$.

Ответ: $(x, y) = (102, 72)$.

Задача 6.

При осмотре логова варваров-хакеров сотрудниками информационной полиции были обнаружены следующие предметы, использовавшиеся для шифрования информации: линейка (см. рис.3); и катушка с белой нитью, на

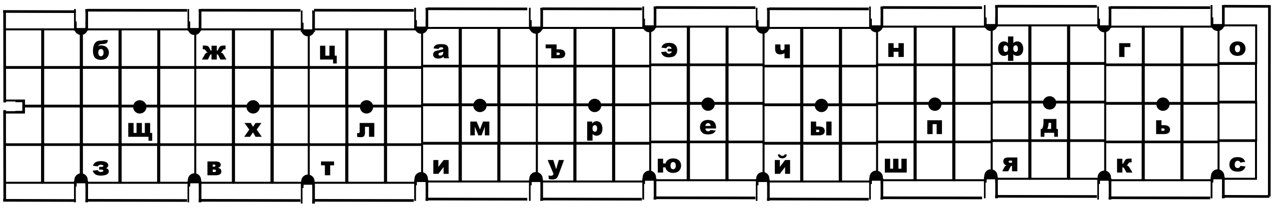


Рис. 3

которую были нанесены черные метки. Расстояния между последовательными метками, измеренные в единицах деления линейки, равны 72; 87.5; 65.5; 51.5; 65.5; 108. Прочитайте сообщение, зашифрованное хакерами.

Решение:

Анализ размеров и формы линейки позволяет сделать вывод о том, что при шифровании использовался принцип «полоски Энея». При этом наматывание нитки на линейку возможно лишь двумя способами. Перебором двух вариантов устанавливаем, что наматывание нити осуществлялось по вертикали снизу вверх, по диагонали – сверху вниз. Скрытый текст: «ВЗЛОМ САЙТА».

Ответ: взлом сайта.

11 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Докажите, что из любых пяти различных натуральных чисел всегда можно выбрать три различных числа так, что их сумма будет делиться на три. Докажите, что из любых двадцати пяти различных натуральных чисел всегда можно выбрать девять различных чисел так, что их сумма будет делиться на девять.

Решение:

Решим сначала первую часть задачи. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 − различные пять натуральных чисел и r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, $r_i \in \{0,1,2\}$ − их остатки от деления на 3 соответственно. Возможны следующие два случая: а) среди чисел r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 есть хотя бы три одинаковых, тогда сумма этих трех чисел делится на три; б) среди чисел r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 нет трех одинаковых, а значит, найдутся три различных числа, имеющие остатки 0, 1 и 2 и тогда их сумма делится на три.

Докажем теперь второе утверждение задачи. Пусть $a_1, \dots, a_{25}$ −любые двадцать пять натуральных чисел. Будем считать, что они упорядочены по возрастанию. Сгруппируем их последовательно по 5 штук: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$; … ; $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$. В каждой пятерке по первой части задачи найдется три различных числа, сумма которых делится на три, выпишем их: v_1, v_2, v_3, $w_1, w_2, w_3, \dots$, z_1, z_2, z_3. Рассмотрим пять различных натуральных чисел $\overline{v} = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$, $\overline{w} = \frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3), \dots$, $\bar{z} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$. Среди этих пяти чисел по доказанной первой части задачи найдутся три различных числа, пусть a, b, c, сумма которых делится на три. Каждое из чисел a, b, c есть $\frac{1}{3}$ от суммы трех некоторых различных чисел из набора $a_1, \dots, a_{25}$, тогда $a + b + c$ есть $\frac{1}{3}$ от суммы некоторых девяти различных чисел из этого же набора. Отсюда из свойств делимости целых чисел следует, что сумма этих девяти чисел делится на 9.

Задача 2.

Ксюша вышивала крестиком. Внутри вышивки она скрыла послание Сереже. Для этого она представила русские буквы парами цифр в соответствии с их номерами в алфавите: А=01, Б=02, … , Я=33, а затем цифры – цветами (на рис. 1 представлены условные обозначения использованных цветов). Сначала она вышила само послание. При этом крестик, соответствующий цифре послания с номером k, она вышивала в позиции с номером k^2+ak+b. Позиции нумеруются слева направо, сверху вниз (например, левая верхняя клетка имеет номер 1, а клетка под ней – номер 51). Затем Ксюша стала заполнять оставшуюся часть картинки, но последние две строчки вышить не успела (рис.2). Прочитайте спрятанное послание.

цифры	цвета
1	x
2	.
3	&
4	:
5	*
6	>
7	<
8	s
9	=
0	ж

Рис. 1.

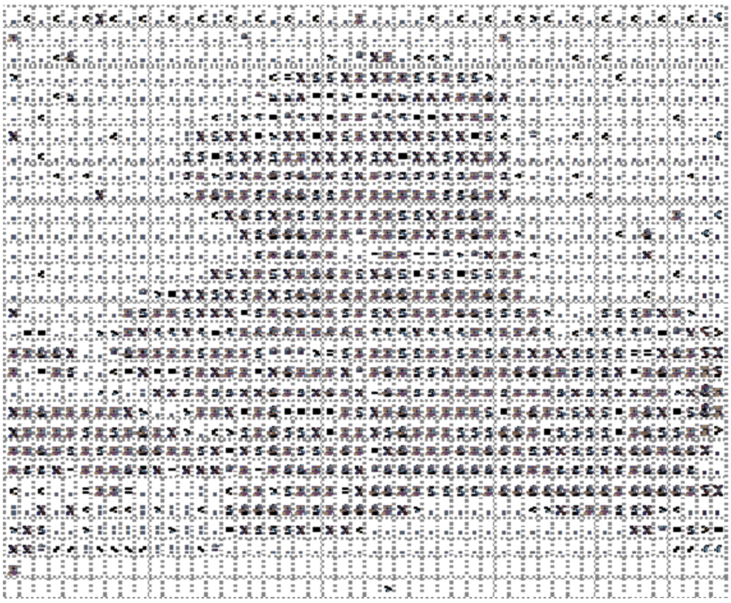


Рис. 2.

Решение:

Рассмотрим расстояние между крестиком, соответствующим k-ому знаку послания, и крестиком, соответствующим (k+1)-му.

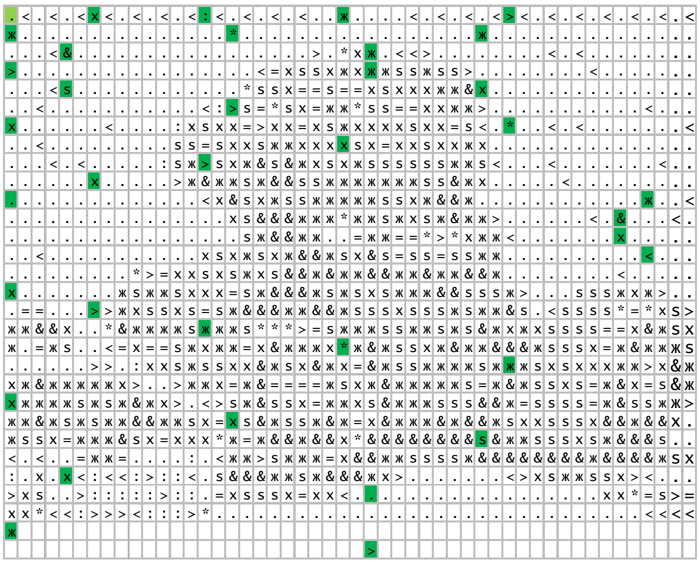
$$(k+1)^2+a(k+1)+b-k^2-ak-b=2k+a+1.$$

И рассмотрим последовательность расстояний между соседними знаками послания:

$$a+3, a+5, \dots, a+2k+1, a+2k+3$$

Видно, что эта последовательность является арифметической прогрессией с

шагом 2. Тогда посчитаем расстояние между двумя известными знаками послания – 76 крестиков. Для нахождения предыдущего символа послания необходимо отсчитать 74 крестиков назад, для пред-предыдущего еще 72 и так до начала первой строки (как показано на рисунке ниже).



Выпишем получившуюся последовательность символов:

<table>
<tr><td>.</td><td>х</td><td>:</td><td>ж</td><td>></td><td>ж</td><td>*</td><td>ж</td><td>&</td><td>ж</td><td>></td><td>ж</td><td>s</td><td>х</td><td>></td><td>х</td><td>*</td><td>х</td><td>></td><td>х</td><td>.</td><td>ж</td><td>&</td><td>х</td><td><</td><td>х</td><td>></td><td>ж</td><td>*</td><td>ж</td><td>х</td><td>х</td><td>s</td><td>х</td><td>.</td><td>ж</td><td>></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>8</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>7</td><td>1</td><td>6</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">М</td><td colspan="2">Е</td><td colspan="2">Д</td><td colspan="2">В</td><td colspan="2">Е</td><td colspan="3">Ж</td><td colspan="2">О</td><td colspan="2">Н</td><td colspan="2">О</td><td colspan="2">К</td><td colspan="2">В</td><td>П</td><td colspan="2">О</td><td colspan="2">Д</td><td colspan="2">А</td><td colspan="2">Р</td><td colspan="2">К</td><td colspan="2">Е</td></tr>
</table>

Далее, начиная с конца, разобьем символы по парам и прочитаем сообщение: «МЕДВЕЖОНОК В ПОДАРКЕ». При этом первый символ является лишним.

Ответ: Медвежонок в подарке.

Задача 3.

При установке TCP/IP соединения между компьютерами **A** и **B** используется так называемая «процедура рукопожатия»: 1) **A** выбирает натуральное число x, не большее 5988, и передает **B** значение функции $F(x)$, а **B** отвечает **A** числом $F(x+1)$; 2) **B** выбирает натуральное число y, не большее 5988, и передает **A** число $F(y)$, при этом **A** отвечает **B** числом $F(y+1)$. Значение функции F равно остатку от деления на 5989 значения аргумента, возведенного в третью степень. Найдите числа x и y, если в сети последовательно наблюдались числа: 1369,1421, 2795 и 2804. Число 5989 выбрано так, что значение аргумента определяется по значению функции F

однозначно.

Решение:

Исходя из условия задачи, составим систему уравнений в общем виде для z, где z - это либо x, либо y:

$$\begin{cases} r_N(z^3)=c_1, \\ r_N((z+1)^3)=c_2, \end{cases} \quad \begin{cases} r_N(z^3)=c_1, \\ r_N(z^3+3z^2+3z+1)=c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2, N - известны. Заметим, что

$$r_N(c_2-c_1+2)=r_N(z^3+3z^2+3z+1-z^3+2)=r_N(3z^2+3z+3),$$

$$r_N(c_2+2c_1-1)=r_N(z^3+3z^2+3z+1+2z^3-1)=r_N(3z^3+3z^2+3z),$$

тогда получаем $r_N(z\cdot(c_2-c_1+2))=r_N(c_2+2c_1-1).$

Для первой пары чисел: $c_2-c_1+2=54$, $c_2+2c_1-1=4158$; тогда $x=\dfrac{4158}{54}=77$. Для второй пары чисел: $c_2-c_1+2=11$, $c_2+2c_1-1=8393$; тогда $y=\dfrac{8393}{11}=763$.

Ответ: $(x,y)=(77,763)$.

Задача 4.

Номера гостиницы Криптохауз открываются магнитными карточками, на которых записаны ключевые последовательности из нулей и единиц длины 8. Чтобы карточка открыла номер класса «эконом» необходимо, чтобы на ней был записан ключ вида (10****0*), номер «стандарт» - ключ вида (**1*1***), «люкс» - (1****0**). На местах, помеченных символом «*», может быть любой из двух символов. Каждый из 174 работников Криптохауза имеет ровно по 9 различных ключей и может использовать только их. Известно, что любой из существующих ключей изготовлен ровно в 27 экземплярах и находится в пользовании. Найдите минимальное число работников, открывающих номера класса «эконом», если получена информация о наличии ключей существующих типов (см. табл. 1).

Табл. 1

Вид	Кол-во
(**1*1***)	21
(1****0**)	23
(101*1*0*)	4
(1*1*10**)	5
(10***00*)	4
(101*100*)	1

Решение:

Найдем общее число различных ключей. Для этого посчитаем количество всех используемых в гостинице ключей с учетом их повторений. Если x – общее число различных ключей, то количество всех используемых ключей с учетом их повторений равно $27x$, поскольку каждый ключ изготовлен ровно в 27 экземплярах. В то же время, каждый из 174 работников имеет ровно по 9 различных ключей, а значит количество используемых в гостинице ключей с учетом их повторений равно $174 \cdot 9 = 1566$. Отсюда, $27x=1566$ и $x=58$.

Теперь найдем количество ключей, открывающих номера класса «эконом». Ясно, что ключи имеющихся трех видов связаны диаграммой Эйлера (см. рис. 3). Пометим получившиеся 7 областей соответствующими числами. Так, например, области 7 соответствуют ключи, открывающие номера всех типов, области 1 – только номера класса «эконом» и т.д. В соответствии с данными задачи, составим таблицу количества ключей, находящихся в различных областях диаграммы (см. табл. 2).

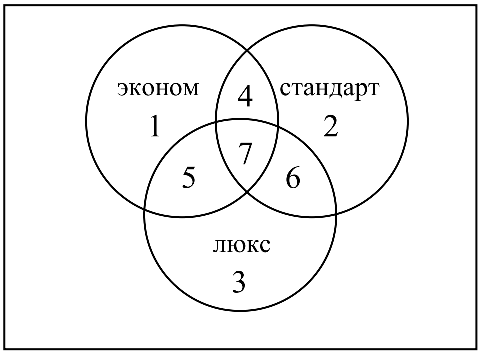


Рис. 3

Область	Кол-во
$4\cup7\cup6\cup2$	21
$5\cup7\cup6\cup3$	23
$4\cup7$	4
$6\cup7$	5
$5\cup7$	4
7	1

Табл. 2

Из полученной таблицы легко найти количество ключей в каждой из областей 2,…,7, находя последовательно число элементов сначала в областях 4,5,6, а затем в 2,3. Чтобы найти число ключей в области 4 нужно из 4 элементов, находящихся в объединении $4\cup7$, вычесть число элементов, входящих в область 7. Отсюда получим, что области 4 ровно 3 различных ключа. Аналогично, в области 5 ровно 3 различных ключей и в области 6 ровно 4 различных ключей. Осталось найти число ключей, в областях 2 и 3. В области 2 ровно: 21-(3+1+4)=13 ключей. В области 3 ровно:

Область	Кол-во
2	13
3	15
4	3
6	4
5	3
7	1

Табл. 3

23-(3+1+4)=15 ключей. Полученные данные запишем в таблицу (см. табл. 3). И теперь, чтобы найти количество ключей, открывающих номера класса «эконом», нужно найти количество ключей, находящихся в области $1 \cup 4 \cup 5 \cup 7$. Для этого вычтем из общего числа различных ключей суммарное количество ключей, находящихся в других областях: 58 – (13+15+4) = 26. Итак, количество ключей, открывающих номера класса «эконом» равно 26.

Найдем минимальное число работников, имеющих ключи, которые открывают номера класса «эконом». Покажем, что это число равно $[27 \cdot 26/9]=78$, где $[x]$ – наименьшее целое, больше либо равное x. Расположим данные ключи в таблицу размера 27 на 26, в столбцах которой будут экземпляры одного и того же ключа, и покроем ее элементы «девятками» - наборами, содержащими не более 9 различных ключей. В этих терминах задача переформулируется так: найти минимальное число «девяток», покрывающих построенную таблицу. Начнем покрывать ее с первой строки, ясно, что минимальное число «девяток» равно 2, т.к. $26=9 \cdot 2+8$, значит оставшееся число ключей в первой строке равно 8. Теперь выберем во второй строке 1 отличный от этих 8 ключей ключ (они образуют «девятку»), и покроем строку минимальным числом «девяток» (их ровно 2), тогда оставшееся число ключей во второй строке равно 7. Продолжим так далее данный процесс, выбирая в очередной строке подходящее число ключей для образования «девяток» с оставшимися ключами предыдущей строки, и разбивая затем строку на минимальное число «девяток». Отразим сказанное в следующей таблице:

	1	2	…	26	Число «девяток»	остаток
1	18		8		2	8
2	1	18		7	3	7
3	2	18		6	3	6
…			…		…	…
9	8	18			3	0
…			…		..	…
27	8	18			3	0

Как видно, девять строк будет происходить повторение по наборам остатков. Всего таких повторений строк равно 27/9=3, а каждая такое повторение строк дает 8·3+2=26 «девяток». Итого 26·3=78 «девяток».

Ответ: 78.

Задача 5.

В клетках таблицы на рис. 4 записаны числа, являющиеся степенями числа 2. Набор из десяти клеток таблицы будем называть «правильным», если в нем присутствуют ровно по одной клетке каждого столбца и каждой строки. Найдите наибольшую возможную сумму чисел в клетках правильного набора и число правильных наборов с суммой 1023.

16	32	64	**128**	1	1	1	1	1	1
32	16	**128**	64	1	1	1	1	1	1
64	**128**	16	32	1	1	1	1	1	1
128	64	32	16	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	256	**512**	1	1	1	1
1	1	1	1	**512**	1	256	1	1	1
1	1	1	1	1	256	**512**	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	4	**8**
1	1	1	1	1	1	1	4	**8**	2
1	1	1	1	1	1	1	**8**	2	4

Рис. 4.

Решение:

Наибольшая возможная сумма в клетках правильного набора получается при перемножении элементов, стоящих в таблице (рис. 4) на местах, выделенных жирным шрифтом. Поэтому наибольшая такая сумма равна $4 \cdot 128 + 3 \cdot 512 + 3 \cdot 8 = 2072$.

Чтобы решить вторую часть задачи, заметим, что верно следующее:

$$1023 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^9.$$

Отсюда следует, что число правильных наборов с суммой 1023 равно числу таких наборов по 10 элементов, стоящих в различных строках и столбцах в таблице на рис. 4, в которых каждое число от 0 до 9 встречается по одному разу. Любой такой набор распадается на 3 набора: набор с числами 2, 4, 8 в нижнем правом квадрате, набор с числами 1, 256, 512 в центральном квадрате и набор с числами 16, 32, 64, 128 в верхнем левом квадрате. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что в каждом из указанных квадратов соответственно имеется 3, 3 и 8 таких наборов, следовательно, общее число наборов равно $3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$.

Ответ: 2072; 72.

Задача 6.

При раскопках стоянки первобытных хакеров были обнаружены приспособления, предположительно использовавшиеся для шифрования паролей: частично поврежденная фигурная линейка (см. рис. 5.) и катушка с белой нитью, на которую нанесены одинаковые черные метки. Расстояния между последовательно идущими метками измерены в единицах деления найденной линейки и равны: 29.5; 24.5; 90; 29.5; 40; 32. Прочитайте пароль, зашифрованный хакерами

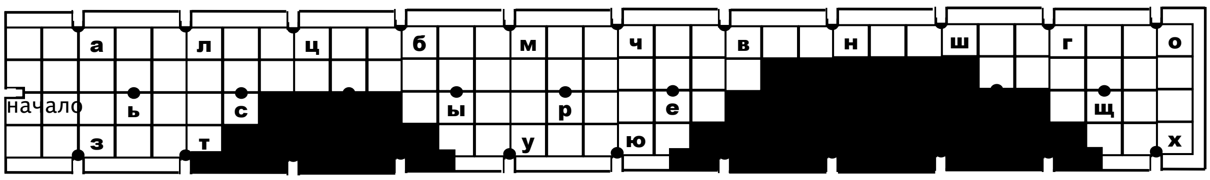
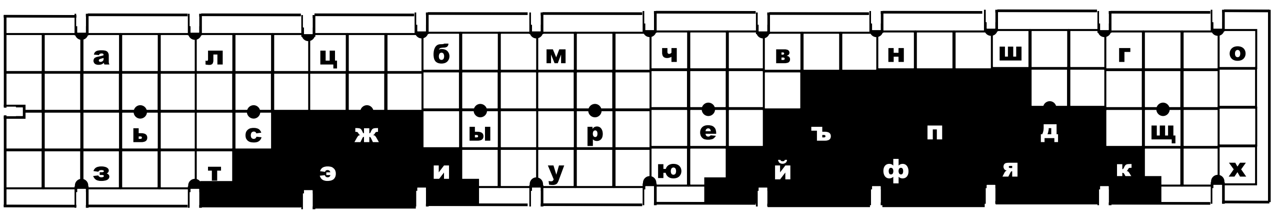


Рис. 5.

Решение:

Рассмотрение оставшихся неповрежденными букв позволяет сделать предположение, что до порчи линейки на ней был изображен 32-буквенный русский алфавит (буква «ё» отсутствует). Анализ порядка следования букв в первой строке и букв, оставшихся во второй и третьей строках, позволяют восстановить утраченные символы (см. рис.6).

Рис. 6



Рассмотрение размеров и формы линейки позволяет сделать предположение о том, что шифрование осуществлялось по принципу «полоски Энея». Анализ величин расстояний между окрашенными точками на нити и на линейке позволяет предположить, что наматывание нити производилось так, что с оборотной стороны линейки нить ложилась вертикально, а с лицевой – диагонально.

Возможны два варианта начала наматывания нити: от «а» к «з» или наоборот. Перебирая два варианта расшифрования, получаем ответ: БЕРЛИН.

Ответ: Берлин.