РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАСС

Задача 1

Воспользуемся формулой разности квадратов для числа $2014^{2^{2014}}-1$:

$$2014^{2^{2014}}-1=\left(2014^{2^{2013}}-1\right)\left(2014^{2^{2013}}+1\right)=$$
$$=\left(2014^{2^{2012}}-1\right)\left(2014^{2^{2012}}+1\right)\left(2014^{2^{2013}}+1\right)=\cdots=$$
$$=(2014-1)(2014+1)\cdot\ldots\cdot\left(2014^{2^{2013}}+1\right).$$

Отсюда следует, что число $2014^{2^{2014}}-1$ больше числа $(2014+1)\cdot\ldots\cdot\left(2014^{2^{2013}}+1\right)$ в 2013 раз.

Ответ: 2013.

Задача 2

Сгруппируем слагаемые в левой и правой частях доказываемого равенства:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{32}+\operatorname{tg}\frac{13\pi}{32}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{32}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}}=\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{32}\cdot\sin\frac{3\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{16}}.$$

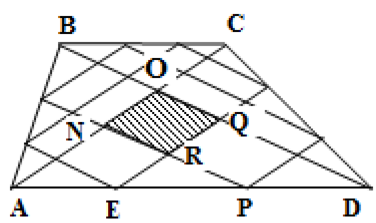
$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{32}+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{32}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{5\pi}{32}\cdot\cos\frac{11\pi}{32}}=\frac{1}{\cos\frac{11\pi}{32}\cdot\sin\frac{11\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{11\pi}{16}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin\frac{13\pi}{16}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{16}}{\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\sin\frac{13\pi}{16}}=\frac{2\cos\frac{5\pi}{16}}{\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\cos\frac{5\pi}{16}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{16}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin\frac{11\pi}{16}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{3\pi}{16}}{\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{11\pi}{16}}=\frac{2\cos\frac{3\pi}{16}}{\sin\frac{11\pi}{16}\cdot\cos\frac{3\pi}{16}}=\frac{2}{\sin\frac{11\pi}{16}}.$$

Теперь нетрудно понять, что доказываемое равенство справедливо.

Задача 3



Обозначим через $S=S_{ONRQ}-$ площадь заштрихованной фигуры.

По свойствам площадей треугольников с общим углом имеем:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{EQD}}=\frac{3\cdot3}{2\cdot2}=\frac{9}{4},$$

отсюда $S_{EQD} = \frac{4}{9} S_{AOD}$. И, следовательно, $S_{AOQE} = S_{PNOD} = \frac{5}{9} S_{AOD}$. В то же время треугольник ERP подобен треугольнику AOD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, значит $S_{ERP} = \frac{1}{9} S_{AOD}$. Поэтому

$$S_{AOQE} + S_{PNOD} + S_{ERP} - S = S_{AOD},$$
$$\frac{5}{9} S_{AOD} + \frac{5}{9} S_{AOD} - \frac{1}{9} S_{AOD} - S = S_{AOD},$$

и $S = \frac{2}{9} S_{AOD}$.

При этом, $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}(h_1 + h_2)$, где $h_1 -$ высота треугольника BOC и $h_2 -$ высота треугольника AOD. Ясно, что $h_1 = \frac{1}{2} h_2$ в силу подобия треугольников BOC и AOD с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}(h_1 + h_2) = \frac{3 \cdot AD}{4} \cdot \frac{3}{2} h_2 = 1,$$

откуда $AD \cdot h_2 = \frac{8}{9}$. И в итоге:

$$S = \frac{2}{9} S_{AOD} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h_2 = \frac{8}{81}.$$

Ответ:$\frac{8}{81}$.

Задача 4

Обозначим через $10x + y -$ искомое двузначное число ($x, y -$цифры от 0 до 9). Очевидно, что последняя цифра y искомогочисла равна 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1. $y = 1$. Заметим, что $(10x + 1)^{2014} = \underbrace{(10x + 1) \cdot \ldots \cdot (10x + 1)}_{2014} = A +$ $+2014 \cdot 10x + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014 \cdot 10x$. Откуда $x = 1$ или $x = 6$.
2. $y = 9$. Заметим, что $(10x + 9)^{2014} = (10(x + 1) - 1)^{2014} =$ $= \underbrace{(10(x + 1) - 1)^{2014} \cdot \ldots \cdot (10(x + 1) - 1)^{2014}}_{2014} = A - 2014 \cdot 10(x +$ $1) + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014 \cdot 10(x + 1)$. Откуда $x = 3$ или $x = 8$.

Суммируя полученное, приходим к ответу.

Ответ: 11,61, 39, 89.

Задача 5

Достаточно заметить, что

$$a_{i,j} + a_{2015-i,2015-j} = (-1)^i(2015 - i - j)^2 +$$
$$+(-1)^{2015-i}\big(2015 - (2015 - i) - (2015 - j)\big)^2 =$$
$$= (-1)^i(2015 - i - j)^2 + (-1)^{2015-i}(2015 - i - j)^2 = 0,$$

поскольку i и $2015 - i$ имеют разные четности. Следовательно, сумма всех элементов в таблице равна нулю.

Ответ: 0.

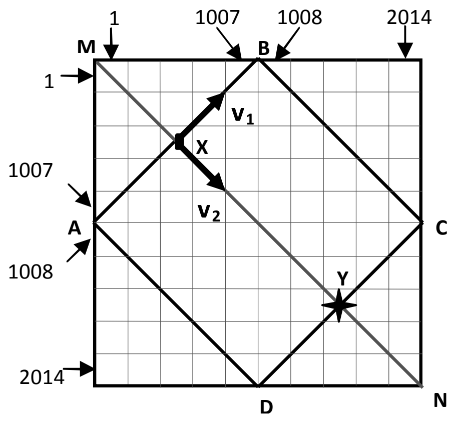
Задача 6

Пусть r_1 иr_2 – концентрации 1-го и 2-го растворов соответственно. После первого переливания концентрация 1-го станет $r_1' = \frac{r_1+r_2}{2}$, а после второго переливания концентрация 2-го станет $r_2' = \frac{\frac{r_1+r_2}{2}+r_2}{2} = \frac{r_1+3r_2}{4}$. Тогда $r_2' - r_1' = \frac{r_2-r_1}{4}$. Следовательно, через n действий разность концентраций станет равна $\frac{r_2-r_1}{4^n} = \frac{0,6-0,1}{4^n} = \frac{1}{2\cdot 4^n}$. Отсюда наименьшим решением неравенства $\frac{1}{2\cdot 4^n} < \frac{1}{1000}$ является $n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 7

Диагональ квадрата занимает 2014 клеток и равна соответственно 2014 см. Из прямоугольного треугольника с известными катетами находим отрезок $AD = XY = 1007$ см. В силу симметрии получаем, что $MX = YN = \frac{1007}{2}$ см. Следовательно, $AX = XB = CY = YD = \frac{1007}{2}$.



Первая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{\frac{1007}{2} + 1007 + \frac{1007}{2} + 4028 \cdot k}{10} = \frac{2014 + 4028 \cdot k}{10}, k = 0,1,2, \dots$$

Вторая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{1007+\left(\frac{1007}{2}+2014+\frac{3}{2}\cdot 1007\right)\cdot n}{13}=\frac{1007+4028\cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\frac{1007+1007+4028\cdot n}{13}=\frac{2014+4028\cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

В первом случае, приравнивая времена и упрощая полученное выражение, получим:

$$\frac{2014+4028\cdot k}{10}=\frac{1007+4028\cdot n}{13},$$

$$4=10n-13k.$$

Уравнение имеет решение $n=3,\ k=2$.

Во втором случае аналогичным образом получим:

$$\frac{2014+4028\cdot k}{10}=\frac{2014+4028\cdot n}{13},$$

$$3=2(13k-10n).$$

Данное уравнение не имеет решений, т.к. 3 – нечетно.

Очевидно, что для найденной пары $(n,k)=(3{,}2)$ время встречи и будет минимально. Теперь находим время $t=\frac{2014+4028\cdot 2}{10} = 1007$.

Ответ: 1007 с.

Задача 8

Площадь квадратов равна n^2. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 8:

$$0^2=0, 1^2=1, 2^2=4, 3^2=1, 4^2=0, 5^2=1, 6^2=4, 7^2=1$$

Таким образом, площади наших квадратов могут при делении на 8 давать остатки 0, 1 и 4. Если площадь одного из квадратов дает остаток 0, то вырежем его – это искомая фигура. Если такового нет, то есть два квадрата, площади которых дают одинаковые остатки. Тогда, вырезав из большего квадрата меньший, получим фигуру буквой «Г», площадь которой кратна 8.