Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

11 класс

1. синяя.

2. $x=\dfrac{7}{15};\ x=\dfrac{4}{5}$.

3. $\dfrac{1}{2}\left(5\pm 3\sqrt{5}\right),\ \dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{41})$.

4. $\left\{\left(-\sqrt{15};0\right);\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}};3\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right);\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\right\}$.

5. $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{2}{3}$, 2 и 1.

6. Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству
$$10^k\sqrt{b}\le n<10^k\sqrt{b+1},$$
последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку
$$10^{2k}b=\overline{b\underbrace{0\ldots0}_{2k}}\le n^2\le\overline{b\underbrace{9\ldots9}_{2k}}=10^{2k}(b+1)-1.$$
Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^k\sqrt{b};10^k\sqrt{b+1}\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt{b+1}-\sqrt{b}>0$).
Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

10 класс

1. Пусть $a_1,\ldots,a_{10}$ – натуральные числа ≤ 23. Имеется $9+8+\ldots+2+1=\frac{9\cdot 10}{2}=45$ различных пар чисел $(a_1,a_2),(a_1,a_3),\ldots,(a_9,a_{10})$. Для каждой пары сумма входящих в нее чисел больше 2 и меньше 46. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две различные пары с одинаковой суммой. Пусть теперь
$$(a_{i_1},a_{j_1}),(a_{i_2},a_{j_2}),\quad i_1<j_1, i_2<j_2$$
две такие пары. Осталось заметить, что в этих двух парах не может быть совпадающих чисел (легко доказывается от противного). Тогда полагаем
$$a=a_{i_1},\quad b=a_{j_1},\quad c=a_{i_2},\quad d=a_{j_2}$$
и имеем требуемое равенство $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$.

2. Можно заметить, что все операции, производимые автоматом, сохраняют НОД предъявленной ему пары чисел. Числа, представленные в условии, разлагаются на простые множители следующим образом: $1037=17\times 61$, $1159=19\times 61$, $611=13\times 47$, $1081=23\times 47$. Таким образом, НОД первой пары равен 61, а второй – 47, и, следовательно, вторая пара из первой получена быть не может.

3. $-2\pm\sqrt{3}$, $-3\pm\sqrt{2}$.

4. 3456.

5. $(0;\pm 2)$, $(\pm 1;\mp 3)$.

6. 10.

Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

9 класс

1. Для любого натурального n
$$n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=-1\cdot(2n+1)+1\cdot(2n+5)=4.$$
Отсюда и из того, что 2012 делится на 4, ясно, что можно решить поставленную задачу периодическим повторением комбинации знаков: «+», «-», «-», «+»..

2. синяя.

3. $\{(0;\pm1);(-1;\pm1)\}$

4. $x=\dfrac{7}{15};\ x=\dfrac{4}{5}$

5. 6.

6. 3456.