РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Для каждого из всевозможных *различных* наборов коэффициентов $\left(d_1,\ldots\right.$ $_i \in \{0;1\}$ рассмотрим сумму вида $S = d_1 \cdot a_1 + \ldots$ $_{11}$. Таких наборов (а значит и сумм) $2^{11} = 2048$ штук. Поэтому по крайней мере две суммы, S' и S'', дают одинаковые остатки от деления на 2047. Следовательно, их разность делится на 2047: $S' - S'' = \left(d_1' - d_1''\right) \cdot a_1 + \ldots$ $\vdots$ Искомые целые числа найдены: $c_i = d_i' - d_i''$. Утверждение доказано.

Задача 2

Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 -$корни нашего уравнения (возможно, среди них есть одинаковые). Следовательно, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = 16.$$

Известно, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического (неравенство Коши), но в нашем случае они равны:

$$\frac{x_1 + x_1 + x_1 + x_1}{4} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = 2.$$

Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2,$ и

$$x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = (x-2)^4.$$

Отсюда $a = 24, b = -32.$

Ответ: $a = 24, b = -32.$

Задача 3

Рассмотрим числа вида $10^k, k = 0,1,\ldots$ а именно: 1, 10, 100, 1000,… Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

Задача 4

Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a,b* и *c* штук. По условию $0{,}1a + 0{,}2b + 0{,}9c = 0{,}2017 \cdot \left(a + b + c\right) \Leftrightarrow 1000 \cdot \left(a + 2b + 9c\right) = 2017 \cdot \left(a + b + c\right).$ Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a + b + c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a,b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500, b\le 500, c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517, 8c\ge 518, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответствующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида С.

Задача 5

Пусть $\sigma(N)-$ сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots$ Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots\ \Big)$ и $\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots$ Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.

Задача 6

Найдем наименьший номер страницы N, на которой будут записаны все числа множества $\{0,1,2,\ \ldots\ ,p-1\}$, где $p=2333$ – простое число. Покажем, что на новой странице различных чисел будет записано по крайней мере на одно больше, чем на предыдущей. Докажем это утверждение методом от противного.

Пусть A – множество различных чисел, полученных на данный момент:

$$A=\{a_1,\ldots,a_m\}\ne\{0,1,\ldots,p-1\}. \qquad (1)$$

Далее Дима выбрал два различных числа b_1, b_2 и прибавил их ко всем числам множества A, но количество сумм в результате не увеличилось. То есть, прибавив к числам из множества A сначала число b_1, а затем число b_2, он получил один и тот же набор сумм:

$$\{r_p(a_1+b_1),\ldots,r_p(a_m+b_1)\}=\{r_p(a_1+b_2),\ldots,r_p(a_m+b_2)\},$$

где $r_p(m)$ – остаток от деления числа m на число p. Следовательно, для любого $a \in A$ существует такой $c \in A$, что $r_p(a+b_2) = r_p(c+b_1)$. Другими словами, верно, что для любого $a \in A$ $r_p(a+(b_2-b_1)) = r_p(c) = c \in A$. Значит, для любого $a \in A$ и для всех $k = 0,1,2,\ldots$ верно, что $r_p(a+k(b_2-b_1)) \in A$. Но для таких k числа вида $r_p(a+k(b_2-b_1))$ между собой различны. (Действительно, пусть числа $r_p(a+k_1(b_2-b_1))$ и $r_p(a+k_2(b_2-b_1))$ совпадают. Значит, разность $\left(a+k_1\left(b_2-b_1\right)\right)-\left(a+k_2\left(b_2-b_1\right)\right)$ делится на p, а следовательно на p делится произведение $\left(k_1-k_2\right)\left(b_2-b_1\right)$, что невозможно, так как каждый сомножитель по абсолютной величине не превосходит $p-1$, а число p – простое.) Получается, что множество A уже содержит p чисел, что противоречит (1).

Итак, доказано, что каждый раз количество различных чисел увеличивается по крайней мере на 1. Значит, самое позднее на странице с номером $p-1$ будут записаны все p чисел. Эта оценка достижима: если каждый раз выбирать числа 0 и 1, то все числа впервые будут записаны именно на странице с номером $p-1$ и не раньше. Следовательно, искомое N равно $p-1$.

Чтобы для получения всех чисел Дима заполнял в тетради максимальное (равное $p-1$) количество страниц, ему следует выбирать числа так, чтоб количество новых различных сумм увеличивалось каждый раз ровно на 1. Для этого необходимо и достаточно, чтобы полученные на каждом шаге различные числа образовывали арифметическую прогрессию, то есть $A = \{a_1, a_1+d, \ldots, a_1+d(m-1)\}$, где d – произвольное заранее выбранное число от 1 до $p-1$, а новые числа b_1 и b_2 надо выбирать так, чтобы $d = |b_2 - b_1|$.

Достаточность очевидна. Необходимость легко доказать по индукции. Действительно, пусть сперва Дима выбрал числа a_1 и $a_2, a_2 > a_1$. Положим $d = a_2 - a_1 > 0$. Затем он выбрал числа b_1 и b_2 и, в результате, получил суммы $a_1+b_1, a_2+b_1, a_1+b_2, a_2+b_2$. Из этих сумм две должны совпадать. Значит или $a_2+b_1 = a_1+b_2$, или $a_1+b_1 = a_2+b_2$. В обоих случаях $d = |b_2-b_1|$. Нетрудно заметить, что получившиеся в результате три новые суммы образуют арифметическую прогрессию. Пусть теперь на m-том шаге получены суммы $\{a_1, \ldots$ образующие арифметическую прогрессию с разностью d. Прибавляя к ней новые числа b_1 и b_2, мы "сдвигаем" всю прогрессию вправо на b_1 и b_2 позиций, и если $d \neq |b_2-b_1|$, то количество новых различных сумм увеличится более чем на 1. Значит, $d = |b_2-b_1|$, и новые суммы опять образуют арифметическую прогрессию с той же разностью. Необходимость доказана.

Ответ: 1) $N = 2332$;

2) Дима выбирает первые два числа a_1 и a_2 произвольно. На каждом шаге новые числа b_1 и b_2 он выбирает так, что $|a_2-a_1| = |b_2-b_1| > 0$.

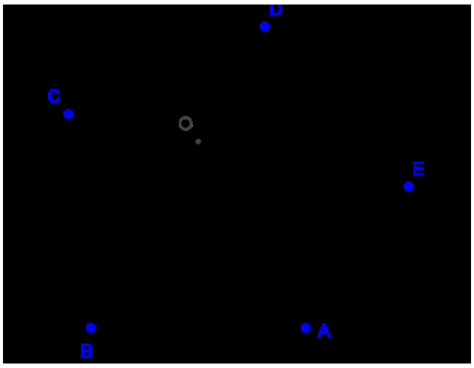
Задача 7

Проведем отрезки *BD* и *CE*. Пусть они пересекаются в точке O. Заметим, что треугольники *BCD* и *CDE* равнобедренные с углом 108° при вершине, а значит, углы при основании равны 36° (они отмечены на рисунке одной дугой). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$. Угол *COD* равен 108° (т.к. в треугольнике *COD* два угла по 36°). Поэтому $\angle COB = 180° - 108° = 72°$. Углы по 72° отмечены на рисунке двумя дугами. Получаем, что треугольники *CBO* и *DEO* равнобедренные. Значит,

$$AB = BO = BC = CD = DE = EO = x.$$

Заметим, что $\angle OBA = 96° - 36° = 60°$. Значит, треугольник *OBA* равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол *AOE*

$$\angle AOE = \angle EOB - \angle AOB = 108° - 60° = 48°.$$



Треугольник *AOE* равнобедренный с углом 48° при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180° - 48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол *E* пятиугольника равен $\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66° + 36° = 102°$.

Ответ: 102^0.

Задача 8

Для таблицы 2 на 2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in R$

число $ad - bc$ будем называть *определителем* этой таблицы.

Пусть в составленной из целых чисел таблице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

у любой подтаблицы размера 2 на 2 (т.е. подтаблицы вида $\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+k} \\ a_{i+k,j} & a_{i+k,j+k} \end{pmatrix}, i, j, i+k, j+k \in \{1, \ldots, 5\}$) определитель делится на целое число *m*. Проделаем с таблицей (1) одно из указанных в задаче действий. Тогда у получившейся в результате таблицы определитель любой ее подтаблицы размера 2 на 2 также будет делиться на *m*. Действительно, проведем доказательство данного факта для действия 1 из условия задачи (для столбцов доказательство аналогично). Пусть, без ограничения общности, к первой строке прибавляется вторая, умноженная на целое число *b*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ba_{21} & a_{12} + ba_{22} & a_{13} + ba_{23} & a_{14} + ba_{24} & a_{15} + ba_{25} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

В получившейся таблице, все подтаблицы 2 на 2, не содержащие элементы первой строки таблицы (2), остались без изменения, и потому их определитель, естественно, на m по-прежнему делится. Поэтому проверим, что в таблице (2) определители подтаблиц 2 на 2, включающие элементы первой строки, делятся на m. Это нужно проверить в двух случаях: 1) подтаблица 2 на 2 составлена из элементов первой и второй строки таблицы (2) и 2) таблица 2 на 2 составлена из элементов первой и еще какой-то (отличной от второй) строки таблицы (2).

- **Случай 1**. Определитель таблицы $\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равен $a_{22}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{21}\left(a_{12}+ba_{22}\right)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, что совпадает с определителем соответствующей подтаблицы таблицы (1), а значит делится на m по условию.
- **Случай 2**. Рассмотрим подтаблицу, составленную из элементов первой и, например, третьей строки: $\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Ее определитель
$$a_{32}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{31}\left(a_{12}+ba_{22}\right) \qquad (3)$$
равен $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}+b(a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22})$. Числа $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}$ и $a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}$ представляют собой определи подтаблиц таблицы (1), а значит, делятся на m. Следовательно, на m делится и определитель (3).

Остается заметить, что определители всех подтаблиц 2 на 2 таблицы A делятся на 3, в то время как таблица B содержит подтаблицу (выделена серым), определитель которой на 3 не делится. Значит получить таблицу B из таблицы A указанными действиями нельзя.

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0