## Вариант 1

**1.** Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2016.

**Решение**: Сумма делителей числа $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ равна $\left(1+p_1+p_1^2+\dots p_1^{k_1}\right)\cdot\left(1+p_2+p_2^2+\dots p_2^{k_2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+p_s+p_s^2+\dots p_s^{k_s}\right)$, где $p_i$ - простые числа. Разложим число 2016 на простые множители: $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Тогда произведение чисел $2\cdot 3^2 = 18$, $2\cdot 7 = 14$ и $2^3 = 8$ равно 2016 и при этом эти числа могут быть представлены: $18 = 1+17$, $14 = 1+13$ и $8 = 1+7$.

**Ответ: 17·13· 7=1547** (один из возможных ответов).

**2.** Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right) = 41$.

**Решение**: Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную "центрирующую" замену:

$\left((x+1,5)^2+3,75\right)\left((x+3,5)^2+3,75\right) = 41$. Замена $x = y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2+3,75\right)\left((y+1)^2+3,75\right) = 41 \Leftrightarrow \left(\left(y^2+4,75\right)-2y\right)\left(\left(y^2+4,75\right)+2y\right) = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+4,75\right)^2 - 4y^2 = 41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

**Ответ**: $\dfrac{-5\pm\sqrt{-11+4\sqrt{26}}}{2}$.

**3.** Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон $a, b, c$ и углами $\alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha$ напротив стороны $a$, $\beta$ – напротив $b$, $\gamma$ – напротив $c$) выполняются равенства $a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma) = b^2+c^2-2bc\cos(60^0+\alpha) = a^2+c^2-2ab\cos(60^0+\beta)$.

**Решение**: Докажем первое равенство

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma) = b^2+c^2-2bc\cos(60^0+\alpha).$$

Преобразуем косинус суммы

$$a^2+b^2-ab\left(\cos\gamma-\sqrt{3}\sin\gamma\right) = b^2+c^2-bc\left(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ab\sin\gamma$ и $\sqrt{3}bc\sin\alpha$ равны друг другу (т.к. оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$ ) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2-ab\cos\gamma = c^2-bc\cos\alpha.$$

Последнее очевидно, поскольку, по теореме косинусов,

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \text{ и } 2bc\cos\alpha = c^2 + b^2 - a^2.$$

Первое равенство доказано. Второе доказывается аналогично.

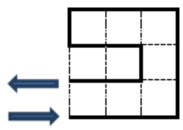
**4.** Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 45 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 100 сторон, а первая – по часовой стрелке через 83 стороны. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?

**Решение**: Пусть первая частица прыгает через $s$ сторон по часовой стрелке, вторая – через $t$ сторон против часовой стрелки. Первоначально первая частица находится на расстоянии $d$ сторон по часовой стрелке от второй. Перейдем в систему отсчета, связанную со второй частицей. То есть, вторая частица неподвижна, а первая совершает прыжки через $s+t$ ребер по часовой стрелки. Заметим, что расстояние между частицами, отсчитываемое по часовой стрелке от первой ко второй, составляет 2016-$d$ сторон. Занумеруем вершины многоугольника целыми числами от 0 до 2015 таким образом, что первоначально первая частица находится в вершине с номером 0, а вторая – в вершине с номером 2016-$d$. Пусть $n$ – искомое количество прыжков. Тогда, чтобы первая частица попала в вершину 2016-$d$, должно выполняться соотношение

$n(s+t) \equiv 2016 - d \pmod{2016} \Leftrightarrow \exists k \in N : n(s+t) + d = 2016k.$ Итак, надо найти натуральное $n$, для которого существует натуральное $k$ такое, что $n = \dfrac{2016k-d}{s+t} = \dfrac{2016k-45}{183}$. Число 2016 дает остаток 3 при делении на 183. Следовательно, чтобы числитель давал остаток ноль при делении на 183, достаточно взять $k$=15. Тогда $n$=165.


**Ответ**: 165.

**5.** На плоскости изображён квадрат $n$x$n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении $n$ и невозможно ни при каком чётном $n$.



**Решение**: Если $n$ – нечётное, то, например, возможна укладка “змейкой” по аналогии с рисунком в условии задачи. Если $n$ – чётное, то количество узлов равно ($n+1$)x($n+1$) – нечётное число. Раскрасим узлы в черный белый цвет так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом оного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но тогда такой маршрут имеет чётную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

**6.** Первый спортсмен начинает движение из пункта A в пункт B, держа в руке эстафетную палочку. Одновременно с ним из пункта B стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами A и B со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до A, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в B, оттуда снова в A и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает её другому спортсмену. Найти путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте B, если расстояние между пунктами A и B равно S.

**Решение**: Нарисуем график зависимости от времени координат спортсменов относительно пункта A, затем выделим те части прямых, когда соответствующий спортсмен владел эстафетной палочкой. Прямую для первого спортсмена обозначим как $L$, участки прямых для второго спортсмена – как $L_1, ..., L_{10}$. Точки передачи эстафетной палочки (они же точки пересечения соответствующих прямых) обозначим как $A_1, ..., A_{10}$. Тогда искомая величина $S_0$ представляет собой сумму проекций выделенных фрагментов на ось ординат, а именно:

$$S_0 = y(A_1) + y(A_1) + y(A_2) + \left[y(A_3) - y(A_2)\right] + y(A_3) +$$

$$+ y(A_4) + \left[y(A_5) - y(A_4)\right] + ... + y(A_9) + y(A_{10}) =$$

$$= 2\left[y(A_1) + y(A_3) + y(A_5) + y(A_7) + y(A_9)\right] + S$$

Уравнение прямой $L$ имеет вид $y = \frac{S}{T}x$.

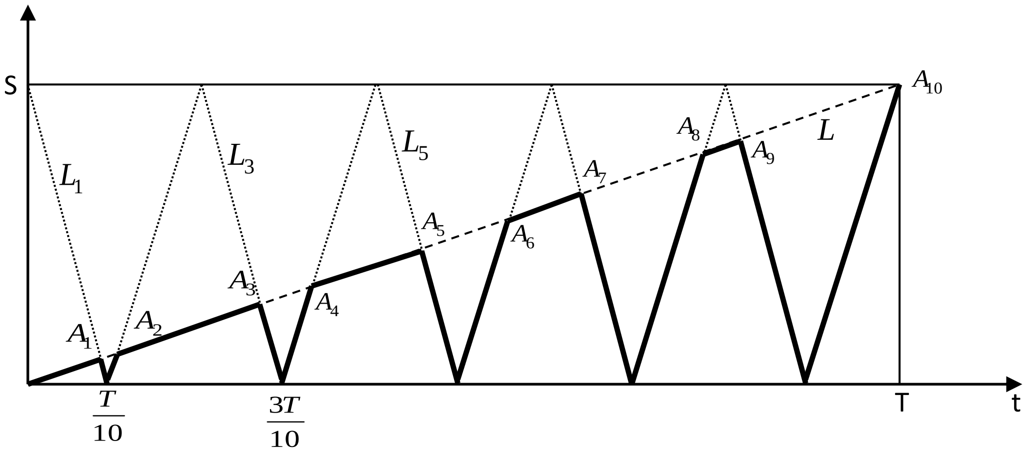
Уравнение прямой $L_1$ имеет вид $y = -\frac{10S}{T}x + S$ (его можно найти, например, подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты двух крайних точек отрезка и решив систему относительно $k$ и $b$).

Составив систему из уравнений для прямых $L$ и $L_1$, найдем ординату точки $A_1$:

$$\begin{cases} y = \frac{S}{T}x \\ y = -\frac{10S}{T}x + S \end{cases} \Rightarrow \quad y(A_1) = \frac{S}{11}.$$

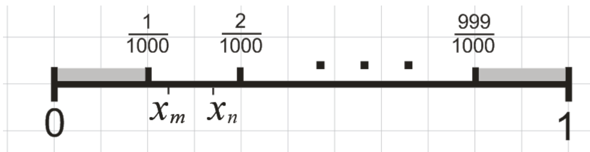
Аналогично получаем $y(A_1) = \frac{3S}{11}$. Нетрудно увидеть, что для всех интересующих нас точек $y(A_{2n+1}) = \frac{(2n+1)S}{11}$. Поэтому $S_0 = 2 \cdot \frac{S}{11}(1+3+5+7+9) + S = \frac{61}{11}S$

**Ответ**: $\frac{61}{11}S$.




**7.** Пусть $x$ – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от $x$ до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\| = 0,3.$) Докажите, что найдётся натуральное число $k$ такое, что 1) $k \le 999$ и 2) $\|k \cdot \sqrt{2}\| < \frac{1}{1000}$.

**Решение**: Разобьем отрезок от 0 до 1 на 1000 одинаковых подотрезков и отметим на нем точки $x_1 = \{1 \cdot \sqrt{2}\}$, $x_2 = \{2 \cdot \sqrt{2}\}, \ldots, x_{999} = \{999 \cdot \sqrt{2}\}$. Здесь фигурные скобки { } обозначают дробную часть числа. В силу того, что число $\sqrt{2}$ иррационально, ни одна точка $x_i$ не может совпасть с концом подотрезка. Ясно также, что если хоть одна из этих точек попала на подотрезок, отмеченный серым, то наше утверждение доказано. Поэтому предположим, что ни одна точка на эти крайние подотрезки не попала. Тогда получается, что наши 999 точек должны разместиться на 998 оставшихся подотрезках. Значит, существует хотя бы один подотрезок, внутрь которого попадут по крайней мере две точки $x_m$ и $x_n$, $m > n.$ Тогда $\|(m-n) \cdot \sqrt{2}\| < \frac{1}{1000}$. Утверждение доказано.




**8.** Найдите все пары натуральных чисел $(x, y)$, удовлетворяющих равенству:

$$x^2 + y^2 = 100000.$$

**Решение:** Равенство $x^2 + y^2 = 100000$ перепишем в виде

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 10,$$

где $z = 100.$ Обозначив еще $p = x/z,\ q = y/z,$ получим уравнение

$$p^2 + q^2 = 10, \quad p, q \in \mathbf{Q}. \qquad (1)$$

Задача сведена, таким образом, к поиску точек с положительными рациональными координатами (со знаменателем 100) на окружности радиуса $\sqrt{10}$, с центром в начале координат. Уравнению (1) удовлетворяют, например, числа $p_0 = 3, q_0 = 1$. Остальные рациональные точки будем искать следующим образом: через точку с координатами $p_0 = 3,\ q_0 = 1$ будем проводить всевозможные прямые

$$p = k(q - q_0) + p_0, \qquad (2)$$

а коэффициент $k$ подбирать так, чтобы точка пересечения прямой (2) и окружности (1) (отличная от $p_0 = 3, q_0 = 1$) имела рациональные координаты. Подставив (2) в (1), получим

$$\left(k\left(q-1\right)+3\right)^2 + q^2 = 10 \Leftrightarrow k^2\left(q-1\right)^2 + 6k\left(q-1\right) + q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\text{сокращаем на } q-1) \Leftrightarrow k^2(q-1) + 6k + q + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q = \frac{k^2 - 6k - 1}{1 + k^2}.$$

Подставляя полученное выражение для $q$ в (2), найдем

$$p = \frac{-3k^2 - 2k + 3}{1 + k^2}.$$

Поскольку $p_0, q_0$ рациональны, а в точке пересечения рациональными должны быть еще и $p, q$, то, как следует из (2), коэффициент $k$ также рационален. Полагая $k = m/n,\ m, n \in \mathbf{Z},$ выражения для $p$ и $q$ перепишем в виде

$$p = \frac{3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn}{n^2 + m^2}, \qquad q = \frac{m^2 - 6mn - n^2}{n^2 + m^2}.$$

Таким образом, искомые числа равны

$x = 3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn, \qquad y = m^2 - 6mn - n^2$, где $m^2 + n^2 = 100.$

Последнее уравнение решается перебором:

$\left(|m| = 10, |n| = 0\right)$, $\left(|m| = 0, |n| = 10\right)$, $\left(|m| = 8, |n| = 6\right)$, $\left(|m| = 6, |n| = 8\right)$. Для найденных $m, n$ (а также с учетом отмеченного ранее решения $p_0 = 3, q_0 = 1$) получаем следующие пары натуральных чисел $(x, y)$:

**Ответ**: (12, 316), (100, 300), (180, 260), (260, 180), (300, 100), (316, 12).