

10 КЛАСС
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите все корни уравнения $\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\sin^3 x} = 4\sqrt{2}$, лежащие на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
2. Докажите, что для любого целого числа N уравнение $10xy + 17xz + 27yz = N$ имеет решение в целых числах.
3. Известно, что многочлен $f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдите многочлен вида $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$, имеющий корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.
4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?
5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).
6. Окружность касается сторон угла в точках А и В. На окружности выбрана точка М. Расстояния от М до сторон угла равны 24 и 6. Найти расстояние от М до прямой АВ.
7. Докажите, что существует натуральное число N , делящееся нацело на 1009, сумма цифр которого равна 1009.
8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображённая на рисунке справа после слова *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2