1 вариант

1. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 30^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). Каким образом и за какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

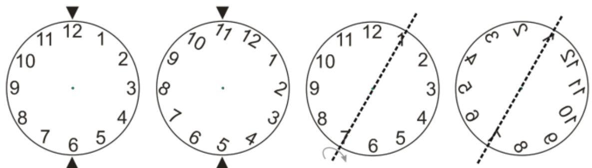


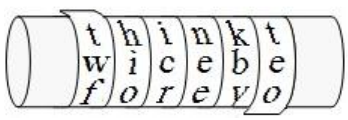
Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

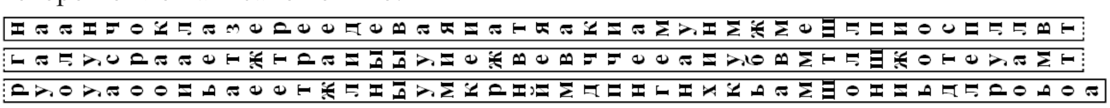
Решение: При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

Ответ: Такими поворотами открыть замок нельзя.

Замечание. *Здесь возможны и более "математизированные" рассуждения. Поворот диска вокруг стержня на 180^0 – это осевая симметрия диска относительно прямой, содержащей стержень. Будем эти осевые симметрии обозначать буквой S. В задаче требуется найти симметрии, композиция которых – поворот на 30^0. Композиция двух осевых симметрий S_1 и S_2 относительно прямых, угол между которыми α, – это поворот на угол 2α. Обозначая поворот буквой R, можем, таким образом, записать $S_2 \circ S_1 = R_{2\alpha}$. Композицией симметрии и поворота будет вновь симметрия $(S \circ R = S)$, а двух поворотов, очевидно, снова поворот $(R \circ R = R)$. Видим также, что симметрия меняет начертание цифр на "зеркальное" (см. переход от Рис.3 к Рис.4). Значит, чтобы диск оказался в положении, изображенном на Рис.2, симметрий должно быть четное число. Но каждая пара симметрий – это поворот, а композиция поворотов – это опять же поворот. Следовательно, композиция четного числа симметрий – поворот, причем на угол, кратный 60^0 (т.к. минимальный угол между прямыми – 30^0). Поэтому повернуть диск на 30^0 не получится.*

2. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение.

Решение: Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 136 букв, и $136=2^3\cdot 17$. Значит, стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размеров типа 4×34, 8×17 и 17×8. Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

н	а	ш	а	в	е	т	х
а	я	л	а	ч	у	ж	к
а	и	п	е	ч	а	л	ь
н	а	и	т	е	м	н	а
ч	т	о	ж	е	т	ы	м
о	я	с	т	а	р	у	ш
к	а	п	р	и	у	м	о
л	к	л	а	у	о	к	н
а	и	л	и	б	у	р	и
з	а	в	ы	в	а	н	ь
е	м	т	ы	м	о	й	д
р	у	г	у	т	о	м	л
е	н	а	и	л	и	д	р
е	м	л	е	ш	ь	п	о
д	ж	у	ж	ж	а	н	ь
е	м	с	в	о	е	г	о
в	е	р	е	т	е	н	а

Ответ:

Наша ветхая лачужка
И печальна и темна.
Что же ты, моя старушка,
Приумолкла у окна?
Или бури завываньем
Ты, мой друг, утомлена,
Или дремлешь под жужжаньем
Своего веретена?

3. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\right)$, вычисляются контрольные суммы *A*, *B* и *C*:

$A=x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}$,

$B=x_1+x_3+x_4+3x_5+x_6+x_7+7x_9+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{15}$, $C=x_1+x_2+x_4+7x_5+x_8+3x_9+x_{10}+x_{14}+x_{16}$.

Если все три суммы *A*, *B* и *C* делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько: у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

Решение: количество корректных номеров есть число решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases} \qquad (*)$$

(по модулю 10).

Для удобства расположим слагаемые (из вида A, B и C) в таблице:

x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Если первые 4 цифры 0 0 0 0, то таблица примет вид:

	x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Но тогда первая строка есть сумма третьей и второй по модулю 10. Вычитая из первой строки вторую и третью, а затем из торой строки третью, получим, что система (*) равносильна системе

$$\begin{cases} x_{15}=4x_5-x_6-x_7+x_8-4x_9+x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}+x_{14} \\ \qquad\qquad x_{16}=-7x_5-x_8-3x_9-x_{10}-x_{14} \end{cases}$$

Количество решений есть количество способов поставить всеми возможными способами на места переменных $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ числа 0,1,2,…,9. Таким образом, число корректных номеров равно 10^{10}.

Если последние 4 цифры 0 0 0 0, то таблица примет вид:

x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1		x_3	x_4	$3\,x_5$	x_6	x_7		$7\,x_9$		x_{11}	x_{12}
x_1	x_2		x_4	$7\,x_5$			x_8	$3\,x_9$	x_{10}		

В отличии от первой части, в этом случае переменные x_1, x_2, x_3 будут линейно выражаться через $x_4, x_6, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. Тогда число решений системы равно 9^{10}

Ответ: в первом случае корректных номеров больше, чем во втором на $10^{10} - 9^{10}$.

4. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots,$ которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 25, n = 1, 2, \ldots.$ Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что: **12, 22, 16, 1, 3, 15, 0, 26, 0, 9, 8, 1.** Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Решение: Обозначим через $r_{32}(a)$ остаток от деления числа *a* на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности $y_1, y_2, \ldots$:

$$y_2 = 4y_1 + 25,\ \ y_3 = 4\left(4y_1 + 25\right) + 25 = 16y_1 + 5\cdot 25,\ \ y_4 = 64y_1 + 21\cdot 25.$$

Далее $r_{32}(y_4) = r_{32}(21\cdot 25) = 13,$ а значит $r_{32}(y_5) = r_{32}\left(4y_4 + 25\right) = r_{32}\left(4\cdot 13 + 25\right) = 13.$ То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности $r_{32}(y_n)$ равны 13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти x_4 надо решить уравнение $r_{32}(y_4 x_4) = 1.$ Заметим, что $r_{32}(y_4 x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(13x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(5\cdot 13x_4) = r_{32}(5\cdot 1) \Leftrightarrow r_{32}(x_4) = 5 \Rightarrow x_4 = 5.$ Следовательно, четвертая буква слова – Е. Аналогично находятся числовые значения букв $x_5, \ldots, x_{12}$. В итоге, искомое слово принимает вид ***ЕПЛАВАНИЕ. Ответ легко угадывается.

Ответ: МОРЕПЛАВАНИЕ.

5. На столе выложены 13 карточек в порядке возрастания их номеров (Рис.а). Карточки разрешается перекладывать *тройками*, а именно: выбираем три любые карточки, например, с номерами 2, 3 и 5. Затем крайняя левая карточка перемещается на место средней, средняя на место крайней правой, а крайняя правая на место крайней левой. Результат изображен на Рис.б. Можно ли, перекладывая карточки указанным способом, уложить их как на Рис.а, но в порядке убывания номеров (карточка с номером 13 – первая, с номером 1 – последняя)?

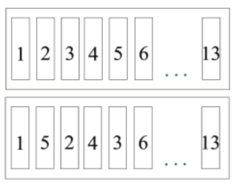


Рис. а

Рис. б

Решение: Покажем, что у любых четырех карточек *A,B,C,D* можно изменить порядок их следования на противоположный (точками сверху будем отмечать те карточки, которые собираемся перекладывать): $\dot{A}, \dot{B}, C, \dot{D} \to D, \dot{A}, \dot{C}, \dot{B} \to D, \dot{B}, \dot{A}, \dot{C} \to D, C, B, A.$ Теперь, перекладывая карточки сразу *четверками*, покажем как переложить 13 карточек в обратном порядке:

$$\dot{1}, \dot{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dot{12}, \dot{13} \to 13, 12, \dot{3}, \dot{4}, 5, 6, 7, 8, 9, \dot{10}, \dot{11},\ 2, 1 \to$$

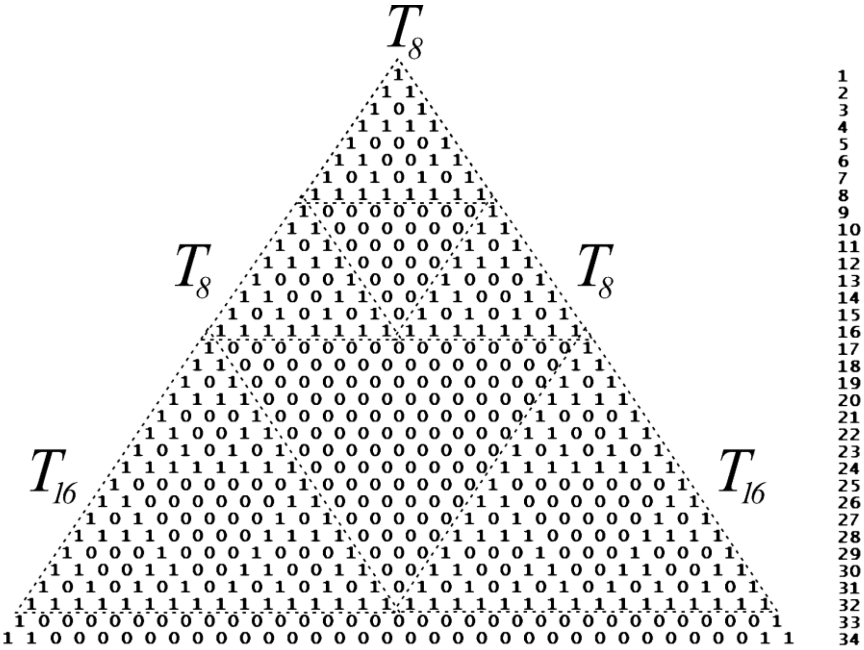
$$\to 13, 12, 11, 10, \dot{5}, \dot{6}, 7, \dot{8}, \dot{9}, 4, 3,\ 2, 1 \to 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ответ: Можно.

6. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 256? б) в строке с номером 200?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

Решение: Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Поэтому в строке 256 четных чисел нет.



Обратимся теперь к строке 200. Понятно, что, после строки 128 (степень двойки), идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 72 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 200 исходного (большого) треугольника, т.к. 200=128+72. Значит единиц в строке 200 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 72. В свою очередь единиц в строке 72 вдвое больше, чем в строке 8 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 64). Количество же 1 в строке 8 можно подсчитать непосредственно – их 8 штук. Значит в строке 200 их 32, остальные 168 – нули.

Ответ: а) 0, б) 168.