Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

11 класс

1. **(2 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 26 красных, 31 синяя и 16 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

2. **(3 балла)** Решите уравнение:
$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5},$$
где символом $[a]$ обозначена целая часть числа a.

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2-4x-5$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:
$$\begin{cases}\log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(9y-15x\right)\\ x^2+y^2=15\end{cases}.$$

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos\frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

6. **(5 баллов)** Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^2 при $n=1,2,3,\ldots(a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ a_4=1,\ a_5=2,\ldots)$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ не является периодической.

Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

10 класс

1. **(3 балла)** Заданы 10 различных натуральных чисел, не превосходящих 23. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a, b, c, d, для которых $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m; n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

1) менять числа местами: $(m; n) \to (n; m)$;
2) заменять первое число суммой первого и второго: $(m; n) \to (m+n; n)$;
3) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m; n) \to (m; |m-n|)$.

Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(1037; 1159)$, не позволят получить на ней запись $(611; 1081)$.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x)) = x$, если известно, что $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1} = 5 \end{cases}.$$

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности радиуса 3, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между хордой AC и касательной AD, который не содержит хорды AB, равен $\frac{5\pi}{12}$. Вычислите целую площади треугольника ABC.

Региональная олимпиада по математике, 2011-2012 уч. год

9 класс

1. **(2 балла)** Докажите, что в выражении $2012^2 * 2011^2 * 2010^2 * \ldots * 2^2 * 1^2$ знак «$*$» можно заменить знаками «+» и «-» так, чтобы полученное выражение равнялось 2012.

2. **(3 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 26 красных, 31 синяя и 16 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

3. **(4 балла)** Найдите все целые решения уравнения:

$$y^2 = x^2 + x + 1.$$

4. **(4 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5},$$

где символом $[a]$ обозначена целая часть числа a.

5. **(4 балла)** Найдите площадь треугольника, если две его медианы равны $\frac{15}{7}$ и $\sqrt{21}$, а косинус угла между ними равен $\frac{2}{5}$.

6. **(5 баллов)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.1.