Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

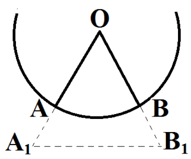
Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

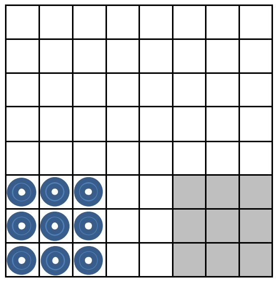
806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1.Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

6. Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

7. Докажите неравенство $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\le\frac{4}{9}$, если известно, что a,b,c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a+b+c=1$.

8. В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?