Условия и решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике 2012-2013 учебного года.

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по 4 равноценных по сложности варианта в каждой.

9 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Найдите все натуральные числа n, при каждом из которых число 2012^n+1 делится нацело на 2013. Решение обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $2012^n+1=(2013-1)^n+1=a\cdot 2013+(-1)^n+1$, для некоторого целого числа a. Тогда очевидно, что 2012^n+1 делится нацело на 2013 при нечетном *n* и не делится при четном.

Ответ: при любом нечетном *n*.

Задача 2.

Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси *OX*. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех x выполняется равенство $f\left(2013-f(x)\right)=-2f(x)+2013$.

Решение:

Пусть $f(x)=kx+b$. Подставим в условие задачи:

$$f(2013-kx-b)=-2(kx+b)+2013,$$

$$k(2013-kx-b)+b=-2(kx+b)+2013.$$

Данное равенство есть равенство линейных функций. Отсюда получим:

$$-k^2=-2k,$$

$$k(2013 - b) + b = -2b + 2013$$

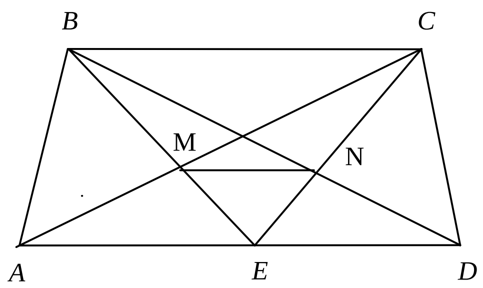
Так как по условию прямая не параллельна оси *OX*, то $k \neq 0$, из первого уравнения находим $k = 2$. Тогда из второго уравнения $b = -2013$.

Ответ: $f(x) = 2x - 2013$.

Задача 3.

В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2,5 и 5. Точка *E* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

Решение:



Из условия задачи следует, что *BC*=*ED*=2,5 и *BC*||*ED*, а тогда по признаку параллелограмма –*BCDE* параллелограмм. Тогда *N* - точка пересечения диагоналей параллелограмма, а значит, середина *CE*. Аналогично, *BCEA* – параллелограмм и *M* – середина *BE*.

Тогда *MN* – средняя линия треугольника *BEC*, а значит, *MN*=1,25.

Ответ: *MN*=1,25.

Задача 4.

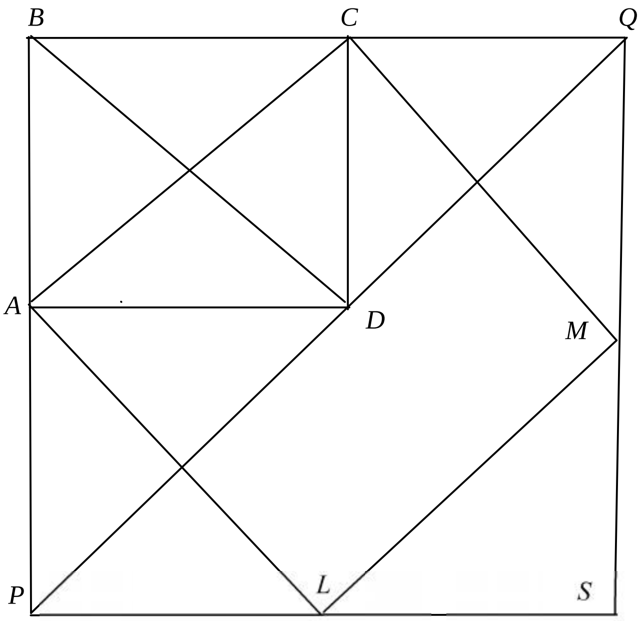
Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат *ABCD*. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в *два раза большую* площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

Решение:

Пусть *ABCD* – исходный квадрат. Построение:

1. Продолжим стороны *BC* и *AB,* и проведем диагонали в квадрате *ABCD.*

2. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведем прямую, параллельную диагонали AC. Она пересечет продолжения сторон BC и AB в некоторых точках Q и P соответственно.
3. Проведем через точку Q, прямую параллельную AB, и через точку P – прямую, параллельную BC. Они пересекутся в точке S.



4. Теперь остается провести прямые $CM \parallel AL \parallel BD$, где $M = CM \cap QS, L = AL \cap PS$. Соединив точки M и L, получим искомый квадрат $ACML$.

Обоснование: Из простых геометрических рассуждений легко получить, что построенная фигура $ACML$ действительно является квадратом. При этом сторона квадрата $AC = \sqrt{2} \cdot BC$, следовательно, площадь $S_{ACML} = 2 \cdot BC^2 = 2 \cdot S_{ABCD}$.

Задача 5.

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в находящийся ниже по течению пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в B проехал $1/8$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

Решение:

Обозначим через v – скорость течения реки, w – скорость катера в неподвижной воде, u – скорость автобуса, S – расстояние от A до B. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9}a = b + \dfrac{4}{9}c \\ \dfrac{9}{8}a = b + c + \dfrac{7}{8}b \\ a = b + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a = \dfrac{6}{15}$, $b = \dfrac{2}{15}$, $c = \dfrac{3}{15}$, где a – время движения автобуса из пункта A в пункт B, b – время движения катера по течению реки из A в B и c – время движения катера против течения реки из B в A.

Значит, автобус в пункте A оказывается через каждые $2 \cdot a = \dfrac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b + c = \dfrac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте A они окажутся через время $t = \dfrac{НОК(12;5)}{15} = 4$ часа.

Ответ: 4 часа.

Задача 6.

Для чисел x, y и z выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел x, y, z равно 2.

Решение:

В данной системе выразим из 1-го уравнения z и подставим полученное во 2-е уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2-x-y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=-\frac{x+y}{2(2-x-y)}$$

Откуда следует, что либо $x+y=0$, либо $\frac{1}{xy}=-\frac{1}{2(2-x-y)} \Leftrightarrow xy=-4+2x+2y \Leftrightarrow$ $(x-2)(y-2)=0$.

В первом случае имеем: $z=2-(x+y)=2$, а во втором $(x-2)(y-2)=0$. Откуда или $x=2$ или $y=2$. Что и требовалось доказать.

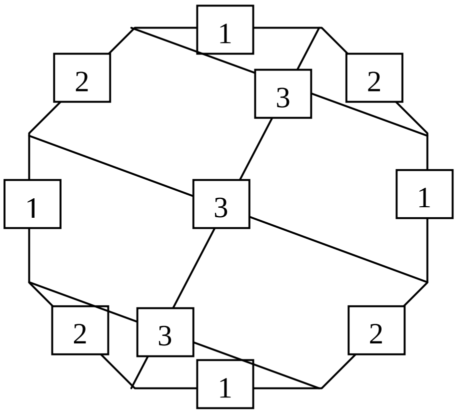
Задача 7.

В некоторой стране имеется n городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

Решение:

Пусть k – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n=2k$. Следовательно, n четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного n. Пусть на плоскости изображен выпуклый n угольник (при четном n). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1…. Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3.



Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

10 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Пусть $a=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ является целым и разложите его на простые множители.

Решение:

Используя формулы приведения и формулу для синуса двойного угла, получим цепочку равенств:

$$a=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{16}$$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=1+16+16^2+16^3=17+16^2\cdot 17=17\cdot 257$$

Ответ: $a=\frac{1}{16}$, $a=17\cdot 257$.

Задача 2.

Последовательность u_n $(n = 0,1,2 \ldots)$ определяется следующим образом: $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ при четном n, и $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ при нечетном n. Найдите u_{2013}. Решение обоснуйте.

Решение:

Пусть n – нечетное. Тогда справедливы равенства:

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n = -(u_n + u_{n-1}) + u_n = -u_{n-1}.$$

Тогда $n-1$ - четное и

$$u_{n-1} = u_{n-2} + u_{n-3} = -u_{n-3} + u_{n-4} + u_{n-3} = u_{n-4}.$$

Таким образом, при любом нечетном n верно равенство:

$$u_{n+2} = -u_{n-1} = -u_{n-4}.$$

или, что то же самое, при любом нечетном n верно равенство:

$$u_{n+6} = -u_n.$$

Следовательно, $u_{2013} = u_{2+6\cdot 335} = (-1)^{335}u_2 = -(u_1 + u_0) = -3$.

Ответ: $u_{2013} = -3$.

Задача 3.

Найдите все натуральные числа n, при каждом из которых число $2011^n + 2013^n$ делится нацело на 2012. Решение обоснуйте.

Решение:

Заметим, что:

$$2011^n + 2013^n = (2012 - 1)^n + (2012 + 1)^n =$$
$$= a \cdot 2012 + (-1)^n + b \cdot 2012 + 1,$$

для некоторых целых чисел a, b. Тогда, очевидно $2011^n + 2013^n$ делится нацело на 2012 при нечетном n и не делится при четном.

Ответ: при любом нечетном n.

Задача 4.

Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, непараллельная оси OX. Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что для всех x выполняется равенство $f\big(2013 - f(x)\big) = -2f(x) + 2013$.

Решение:

Пусть $f(x) = kx + b$. Подставим в условие задачи:

$$f(2013 - kx - b) = -2(kx + b) + 2013,$$

$$k(2013 - kx - b) + b = -2(kx + b) + 2013.$$

Данное равенство есть равенство линейных функций. Отсюда получим:

$$-k^2 = -2k,$$

$$k(2013 - b) + b = -2b + 2013$$

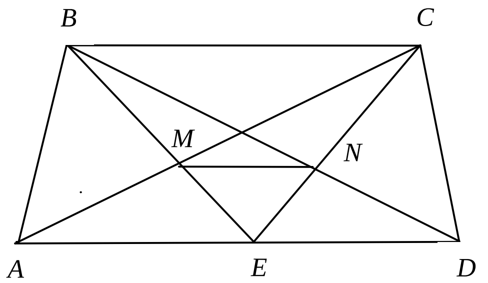
Так как по условию прямая не параллельна оси *OX*, то $k \neq 0$, из первого уравнения находим $k = 2$. Тогда из второго уравнения $b = -2013$.

Ответ: $f(x) = 2x - 2013$.

Задача 5.

В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

Решение:



Очевидно, что треугольники *AME* и *CBM* подобны по двум углам и их коэффициент подобия равен $\frac{ME}{BM} = \frac{AE}{BC} = 1{,}5$. Поскольку трапеция равнобедренная, то несложно показать, что $MN \parallel BC$ и тогда треугольники *MNE* и *BCE* также подобны. Отсюда имеем:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{ME}{BE} = \frac{ME}{BM + ME} = \frac{1{,}5}{1 + 1{,}5} = \frac{3}{5}.$$

.

Ответ: $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$.

Задача 6.

Для чисел x, y и z выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел x, y, z равно 2.

Решение:

В данной системе выразим из 1-го уравнения z и подставим полученное во 2-е уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2-x-y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=-\frac{x+y}{2(2-x-y)}$$

Откуда следует, что либо $x+y=0$, либо $\frac{1}{xy}=-\frac{1}{2(2-x-y)} \Leftrightarrow xy=-4+2x+2y \Leftrightarrow$ $(x-2)(y-2)=0$.

В первом случае имеем: $z=2-(x+y)=2$, а во втором $(x-2)(y-2)=0$. Откуда или $x=2$ или $y=2$. Что и требовалось доказать.

Задача 7.

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

Решение:

Обозначим через v – скорость течения реки, w – скорость катера в неподвижной воде, u – скорость автобуса, S – расстояние от A до *B*. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{5}{9}a = b + \frac{4}{9}c \\ \frac{9}{8}a = b + c + \frac{7}{8}b \\ a = b + \frac{16}{60} \end{cases}$$

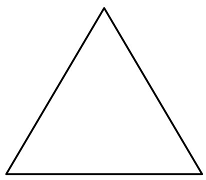
Решая систему, найдем $a = \dfrac{6}{15}$, $b = \dfrac{2}{15}$, $c = \dfrac{3}{15}$, где a – время движения автобуса из пункта *A* в пункт *B*, b – время движения катера по течению реки из *A* в *B* и c – время движения катера против течения реки из *B* в *A*.

Значит, автобус в пункте *A* оказывается через каждые $2 \cdot a = \dfrac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b + c = \dfrac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте *A* они окажутся через время $t = \dfrac{НОК(12;5)}{15} = 4$ часа.

Ответ: 4 часа.

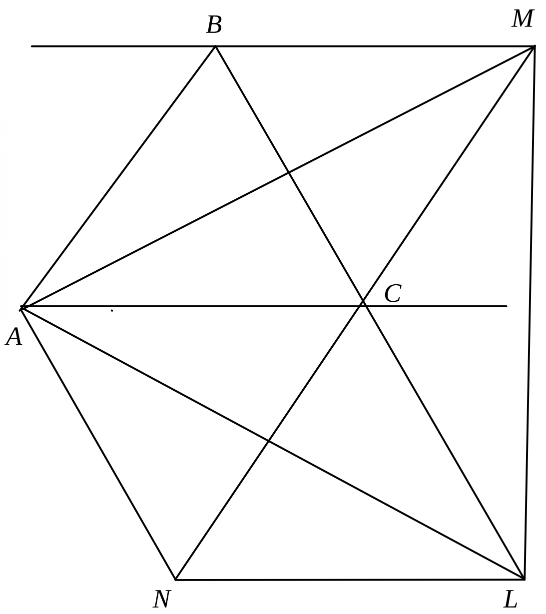
Задача 8.

Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью



данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза большую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.

Решение:



Пусть ABC – исходный правильный треугольник. Построение:

1. Проведем прямую BM параллельно AC, CM параллельно AB: $M = CM \cap BM$.
2. Проведем прямую AN параллельно BC: $N = CM \cap AN$.
3. Проведем прямую NL параллельно AC: $L = BC \cap NL$.

Тогда треугольник AML - правильный и его площадь в три раза больше площади треугольника ABC.

Обоснование: по построению $ABMC$ и $ACLN$ – равные между собой ромбы с острым углом 60°. Тогда $\angle MAL = 60^\circ$ и следовательно, треугольник AML правильный. При этом $AM = AL = \sqrt{3}AB$, а значит, $S_{AML} = \frac{\sqrt{3}}{4}AM^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 3S_{ABC}$.

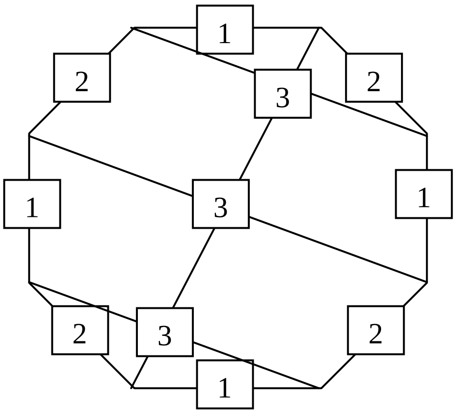
Задача 9.

В некоторой стране имеется n городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Для произвольного четного n постройте пример расположения городов и дорог.

Решение:

Пусть k – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n = 2k$. Следовательно, n четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного n. Пусть на плоскости изображен выпуклый n угольник (при четном n). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1…. Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3.



Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

11 классы

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

Решение:

Обозначим через v – скорость течения реки, w – скорость катера в неподвижной воде, u – скорость автобуса, S – расстояние от *A* до *B*. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9}a = b + \dfrac{4}{9}c \\ \dfrac{9}{8}a = b + c + \dfrac{7}{8}b \\ a = b + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a=\frac{6}{15}$, $b=\frac{2}{15}$, $c=\frac{3}{15}$, где a – время движения автобуса из пункта A в пункт B, b – время движения катера по течению реки из A в B и c – время движения катера против течения реки из B в A.

Значит, автобус в пункте A оказывается через каждые $2\cdot a=\frac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b+c=\frac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте A они окажутся через время $t=\frac{НОК(12;5)}{15}=4$ часа.

Ответ: 4 часа.

Задача 2.

Последовательность $u_0, u_1, u_2, \ldots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$, если n – четное и $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$, если n – нечетное. Известно, что $u_0=1, u_1=2$. Найдите u_{2013}. Ответ обоснуйте.

Решение:

Пусть n – нечетное. Тогда справедливы равенства:

$$u_{n+4}=3u_{n+3}-2u_{n+2}=3(u_{n+2}-u_{n+1})-2u_{n+2}=u_{n+2}-3u_{n+1}=$$
$$=3u_{n+1}-2u_n-3u_{n+1}=-2u_n.$$

Следовательно, $u_{2013}=u_{1+4\cdot 503}=(-2)^{503}u_1=-2^{504}$.

Ответ: $u_{2013}=-2^{504}$.

Задача 3.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x=2\cos^3 y\\ \sin x=2\sin^3 y\end{cases}$$

Решение:

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим следствие из исходной системы:

$$4\cos^6 y + 4\sin^6 y = 1.$$

Разделим полученное равенство на 4 и применим к левой части формулу суммы кубов. Имеем:

$$(\cos^2 y + \sin^2 y)\cdot(\cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y) = \frac{1}{4},$$

$$\cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y = \frac{1}{4},$$

$$(\cos^2 y + \sin^2 y)^2 - 3\cos^2 y \sin^2 y = \frac{1}{4},$$

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Разбивая полученное решение на 4 серии, получим следующий ответ.

Ответ: $x = \frac{®}{4} + 2®k$, $y = \frac{®}{4} + 2®n$; $x = \frac{3®}{4} + 2®k$, $y = \frac{3®}{4} + 2®n$; $x = \frac{5®}{4} + 2®k$, $y = \frac{5®}{4} + 2®n$; $x = \frac{7®}{4} + 2®k$, $y = \frac{7®}{4} + 2®n$.

Задача 4.

Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной x. При этом для всех x выполняется равенство $(f(x-2013)-1)(f(x+2013)-1) = -2$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

Решение:

Согласно условию задачи получим равенство:

$$(f(x-3\cdot 2013)-1)(f(x-2013)-1) = -2.$$

Разделим тождество $(f(x-2013)-1)(f(x+2013)-1) = -2$ из условия на полученное равенство, тогда придем к равенству:

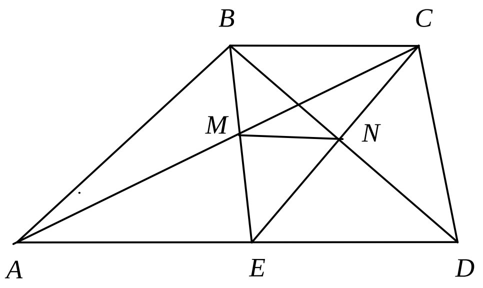
$$\frac{f(x-3\cdot 2013)-1}{f(x+2013)-1} = 1 \Leftrightarrow f(x-3\cdot 2013) - 1 = f(x+2013) - 1.$$

Откуда следует, что $f(x+4\cdot 2013) = f(x)$. Таким образом, $4\cdot 2013$ - период (возможно не минимальный) функции $f(x)$. Что и требовалось доказать.

Задача 5.

В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции. Найдите длину отрезка *MN*.

Решение:



Очевидно, что следующие пары треугольников подобны (по двум углам): $AME \approx CBM$ и $DNE \approx BNC$. При этом, так как $AE=ED$, то их коэффициенты подобия равны между собой и равны $\frac{AE}{BC} = \frac{ED}{BC} = 1,5$. Следовательно $\frac{ME}{BM} = \frac{NE}{CN}$, а тогда из обратной теоремы Фалеса следует, что $MN \| BC$ и треугольники *BEC* и *MEN* подобны. Отсюда находим отношение:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1,5}{1,5+1} = \frac{3}{5}.$$

и $\mathrm{MN} = \frac{3}{5}\mathrm{BC} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $MN = \frac{3}{5}$.

Задача 6.

Найдите наименьшее натуральное число n такое, что число $n + 2012$ делится нацело на 2013, а число $\mathrm{n} + 2013$ делится нацело на 2012. Ответ обоснуйте.

Решение:

Из условия следует, что $n + 2013 = 2012k$, $n + 2012 = 2013t$, где k и t - некоторые натуральные числа. Тогда, вычитая из первого второе, получим:

$$2012k - 2013t = 1.$$

Отсюда:

$$2012k - (2012 + 1)t = 1.$$

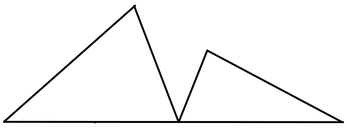
$$2012(k-t) = t+1.$$

Следовательно, наименьшее натуральное число t с таким равно 2011. И наименьшее натуральное n из условия задачи: $n = 2013 \cdot 2011 - 2012 = 4046131$.

Ответ: 4046131.

Задача 7.

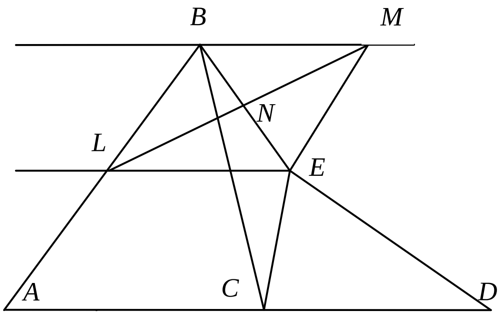
Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную сумме площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.



Решение:

Пусть *ABC* и *CED* – исходные треугольники. Построение:

1. Проведем прямые *EL* и *BM* параллельно *AC*.
2. Проведем прямую *EM* параллельно *AB*.
3. $N = BE \cap LN$.



Тогда площадь треугольника *AND* равна сумме площадей треугольников *ABC* и *CED*.

Обоснование: несложно убедиться в том, что высота треугольника *AND* равна полусумме высот треугольников *ABC* и *CED* (проведенных из вершин *N*, *B* и *E* соответственно). Учитывая, что *AC*=*CD*, получим: $S_{AND} =$

$\frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) = \frac{1}{4}AD \cdot h_1 + \frac{1}{4}AD \cdot h_2 \;=\; \frac{1}{2}AC \cdot h_1 + \frac{1}{2}CD \cdot h_2 \;=$
$= S_{ABC} + S_{CED}.$

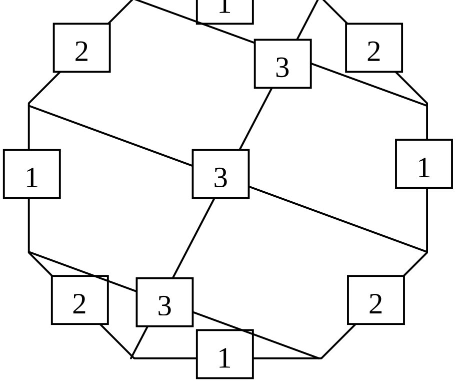
Задача 8.

В некоторой стране имеется n городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Для произвольного четного n постройте пример расположения городов и дорог.

Решение:

Пусть k – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n = 2k$. Следовательно, n четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного n. Пусть на плоскости изображен выпуклый n угольник (при четном n). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1….



Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3. Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

Задача 9.

Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города A, избрав себе следующий маршрут движения: из города A он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2,…. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город A.

Решение:

Опишем маршрут движения путешественника последовательностью $b_i=(A_i,s_i)$, $i\in\mathbb{N}_0$, где A_i - город, посещенный на i-ом шаге, s_i - номер дороги-выезда из города A_i, и при этом $A_0=A$, $s_0=1$. Количество всевозможных пар $b_i=(A_i,s_i)$ равно $3n$, следовательно, на маршруте движения $b_0,b_1,b_2,\dots$ начнутся повторения.

Предположим, что в город A путешественник не вернется. Тогда поскольку на маршруте начнутся повторения, то найдутся натуральные числа k и t такие, что выполняются условия:

$$b_t=b_k, 1\le k\le t-1$$

и $b_i\ne b_j$ $(i\ne j)$, при всех $i,j\in\{1,\dots,t-1\}$ (другими словами, первый повтор членов последовательности $b_i=(A_i,s_i)$, $i\in\mathbb{N}_0$, произошел на шаге с номером t). Но тогда в город A_k путешественник попадает из города A_{k-1} по дороге с номером s_{k-1}, а затем из города A_{t-1} по дороге с номером s_{t-1}. При этом дальнейший маршрут движения в город A_{k+1} одинаковый. Тогда ввиду однозначности маршрута, номера дорог, по которым попадаем в город A_k, совпадают. Так как в каждый город ведут дороги с различными номерами, то города A_{k-1} и A_{t-1} совпадают. Но тогда $b_{k-1} = b_{t-1}$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение не верно. А значит, утверждение доказано.