Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Окружность, первоначально касающаяся середины стороны правильного выпуклого 18 – угольника, катится по нему снаружи без проскальзывания и заканчивает движение в той же точке. Длина окружности равна 1, длина стороны 18 – угольника равна 1. Сколько оборотов вокруг своего центра совершила окружность?
2. Известная последовательность чисел Фибоначчи задаётся следующим образом: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2,3,4, \ldots$, причём $F_0 = 0, F_1 = 1$. Про последовательность (a_n) известно следующее: $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, $r_5(a_{999}) = 0$, $r_5(a_{997}) = 1$. Найдите $r_5(a_{1000})$. Здесь под $r_m(n)$ понимается остаток от деления целого числа n на целое число m.
3. У Бориса было 15 различных кубиков. Для каждого кубика Борис изготовил из дерева по одному стержню, длина которого совпадала с длиной ребра соответствующего кубика. Сумма длин всех стержней оказалась равна 87. Затем Борис из этих 15 стержней составил всевозможные пары (пары, например, для 1-го и 2-го кубиков – это одна пара) и для каждой пары вычислил площадь прямоугольника со сторонами, равными их длинам. Суммарная площадь всех прямоугольников получилась 3414. Затем Борис составил всевозможные тройки стержней (как и выше, набор $\{1,2,3\}$ – это одна тройка) и вычислил объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными их длинам. Суммарный объём параллелепипедов оказался равен 79940. Найдите суммарный объём 15 кубиков.
4. Пусть дана последовательность (a_n):
$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2025} - 2\sin\frac{(n+1)\pi}{2025} - 3\sin\frac{(n+2)\pi}{2025} + 4\sin\frac{(n+3)\pi}{2025}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$
Найдите какие-нибудь целые числа a и b, такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4047} = a \cdot \sin\frac{\pi}{b}$. Ответ обоснуйте.
5. Пусть *ABCD* – выпуклый четырёхугольник. *AD*=19, *BC*=17, *AB*=*CD* и *MN*=18, где *M* и *N* середины сторон *AB* и *CD* соответственно, диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны. Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*.

6. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; будем считать, что $f(0) = 1$. Докажите, что для всех $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Среди дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < 15$, найдите ту, которая на числовой оси расположена ближе всего к дроби $\frac{14}{23}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Число оборотов равно сумме числа оборотов, набранных при движении по сторонам 18 – угольника и числа оборотов, набранных при переваливании через вершины. При переваливании через вершину с внутренним углом α окружность поворачивается на угол $\pi - \alpha$. Тогда в сумме при переваливании через все n вершин получится поворот на угол $\sum_{i=1}^{18}(\pi - \alpha) = 2\pi$.

То есть, на один полный оборот.

ОТВЕТ: 19.

Задача 2

Так как $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, то $F_n = a_n - 5a_{n-1} + 1$. Пользуясь тем, что $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, получаем выражение $a_n - 5a_{n-1} + 1 = a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 + a_{n-2} - 5a_{n-3} + 1$. Упростив его получим $a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3} = 1$. Причем последнее равенство верно для всех n, а значит верно и при $n - 1$, то есть $a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} + 5a_{n-4} = 1$. Приравняв последние два равенства получим: $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} - 5a_{n-4} = 0$ или $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - a_{n-3} + 5a_{n-4}$. Поделив с остатком на 5 левую и правую часть при $n = 1000$ получим, что $r_5(a_{1000}) = r_5(7 * 0 - 1) = 4$.

ОТВЕТ: 4.

Задача 3

Обозначим $x_1, \dots, x_{15}$ – длины ребер кубиков, $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 87$, $S_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{14}x_{15} = 3414$, $S_3 = x_1x_2x_3 + \cdots + x_{13}x_{14}x_{15} = 79940$.

Тогда $x_1^3 + \cdots + x_{25}^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 7269$.

ОТВЕТ: 7269.

Задача 4

Рассмотрим первые 4 члена последовательности.

$a_1 = \sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025} + 4\sin\frac{4\pi}{2025}$.

$a_2 = \sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025} - 3\sin\frac{4\pi}{2025} + 4\sin\frac{5\pi}{2025}$.

$a_3 = \sin\frac{3\pi}{2025} - 2\sin\frac{4\pi}{2025} - 3\sin\frac{5\pi}{2025} + 4\sin\frac{6\pi}{2025}$.

$a_4 = \sin\frac{4\pi}{2025} - 2\sin\frac{5\pi}{2025} - 3\sin\frac{6\pi}{2025} + 4\sin\frac{7\pi}{2025}$.

Тогда просуммировав их, получим, что коэффициент при $\sin\frac{4\pi}{2025}$ равен $4 - 3 - 2 + 1 = 0$. Аналогично (добавив a_5) исчезнет и $\sin\frac{5\pi}{2025}$ и т.д. Таким образом из искомой суммы исчезнут $\sin\frac{k\pi}{2025}$, где $k = 4,5, \dots, 4047$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \left(\sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(4\sin\frac{4048\pi}{2025}\right) + \left(-3\sin\frac{4048\pi}{2025} + 4\sin\frac{4049\pi}{2025}\right) + \left(-2\sin\frac{4048\pi}{2025} - 3\sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}\right),$$

последние 3 скобки получились из a_n при $n = 4045, 4046, 4047$.

$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \sin\frac{\pi}{2025} - \sin\frac{2\pi}{2025} - 4\sin\frac{3\pi}{2025} - \sin\frac{4048\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}$.

Остается заметить, что $\sin\frac{4050\pi}{2025} = \sin 2\pi = 0$,

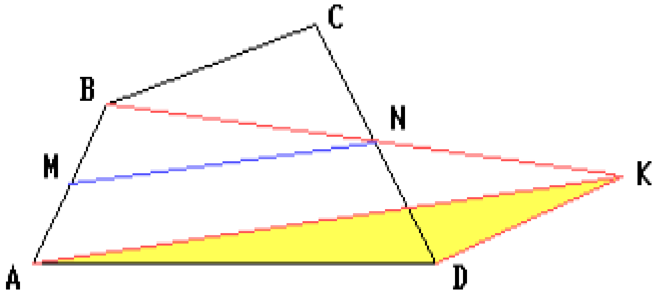
$\sin\frac{\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4048\pi}{4050} = 0$,

$\sin\frac{2\pi}{2025} + \sin\frac{4048\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4046\pi}{4050} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2025} = \sin\frac{\pi}{675}$.

ОТВЕТ: $-4\sin\frac{\pi}{675}$.

Задача 5

Докажем, что *ABCD* – трапеция. На продолжении отрезка *BN* за точку *N* отложим отрезок *NK*, равный *BN*. Из равенства треугольников *BCN* и *KDN* (по двум сторонам и углу между ними) следует, что *DK* = *BC* и *DK* || *BC*.



Поскольку *MN* – средняя линия треугольника *ABK*, то *AK* = 2*MN* = *AD* + *BC* = *AD* + *DK*. Следовательно, точка *D* лежит на отрезке *AK* и *AD* || *BC*.

Далее, используя условие перпендикулярности диагоналей, получаем $S = 324$.

ОТВЕТ: 324.

Задача 6

Очевидно, что достаточно доказать для $x \in [0,1]$.

1-ый способ. Воспользоваться неравенством $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ и доказать $\frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2-ой способ. Замена $x = tg\, t$. После очевидных преобразований придём задаче: доказать $tg\, t \geq t$ для всех $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Последнее неравенство легко доказывается с использованием производной.

Задача 7

Представим $\frac{14}{23}$ в виде цепной дроби:

$$\frac{14}{23}=\frac{1}{23/14}=\frac{1}{1+\frac{9}{14}}=\frac{1}{1+\frac{1}{14/9}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{9}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\mathbf{\frac{1}{4}}}}}}$$

Заменив выделенную жирным дробь $1/4$ на x, получим функцию

$$R(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}=\frac{3+2x}{5+3x}.$$

Ясно, что если x «варьируется вблизи» $1/4$, то значение дроби $R(x)$ будет «варьироваться вблизи» $\frac{14}{23}$. Заметим, что функция $R(x)$ при $x>0$ возрастает и $R(0)=\frac{3}{5}<R(1/4)=\frac{14}{23}$. Поэтому, при $x>0$ некоторые значения дроби $R(x)$ окажутся ближе к дроби $\frac{14}{23}$, нежели $\frac{3}{5}$, однако пока непонятно будет ли при этом знаменатель дроби $R(x)$ (для $x\in\mathbb{Q}$) удовлетворять ограничениям задачи. Изучим этот вопрос, положив $x=a/b$, где $a\in\mathbb{N}_0, b\in\mathbb{N}$. Считаем дробь a/b несократимой. Тогда

$$R(a/b)=\frac{3b+2a}{5b+3a}. \quad (1)$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}$ и $(a,b)=1$. Тогда дробь (1) несократима.

Доказательство. Предположим противное: существует простое число d такое, что числитель и знаменатель дроби (1) на него делятся. Тогда на d будет делиться и выражение $5\cdot(3b+2a)-3\cdot(5b+3a)=a$. Следовательно, d – делитель a, но не делитель b (в силу взаимной простоты a и b). Чтобы на d поделился числитель дроби (1), необходимо, чтоб на d делилось число $3b$, то есть d должно равняться 3. Но слагаемое $5b$ в знаменателе не делится на 3, а значит дробь (1) несократима. Получено противоречие. Утверждение доказано. ■

Доказав, что (1) несократима, мы можем утверждать, что знаменатель дроби (1) не превзойдёт 14 лишь в случаях: 1) $a=0,\ b\in\mathbb{N}$, и тогда $R(a/b)=R(0)=\frac{3}{5}$, 2) $a=1, b=1$, и тогда $R(a/b)=R(1)=\frac{5}{8}$, 3) $a=1, b=2$, $R(1/2)=\frac{8}{13}$, 4) $a=2, b=1$, $R(2)=\frac{7}{11}$, 5) $a=3, b=1$, $R(3)=\frac{9}{14}$. Среди найденных вариантов ближайшей к дроби $\frac{14}{23}$ будет дробь $\frac{8}{13}>\frac{14}{23}$.

ОТВЕТ: $\frac{8}{13}$.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых восьми подряд идущих натуральных чисел?
2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? В поле «Ответ» через запятую запишите все возможные остатки в порядке возрастания.
3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 2$ и $AD = 6$, отмечены 13 точек $K1, K2, \ldots, K13$, разбивающие сторону AB на 14 равных отрезков, то есть $AK1 = K1K2 = \cdots = K12K13 = K13B$. Затем через точки $K1, K2, \ldots, K13$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках $T1$, $T2$, … , $T13$. Найдите сумму длин получившихся тринадцати отрезков $K1T1, \ldots, K13T13$.
4. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке [2,10] минимален. В поле «Ответ» запишите сумму $a + b$, округлённую до десятых.
5. На медиане, проведённой из вершины треугольника на основание, взята точка A. Сумма расстояний от A до боковых сторон треугольника равна 3. Найдите расстояния от A до боковых сторон, если длины боковых сторон равны 4 и 2. В поле «Ответ» запишите произведение найденных расстояний, округлённое до десятых.
6. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 + 25x + 2y = 2 \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Найдите сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Ответ округлите до десятых.

ОТВЕТЫ

1) 40320.
2) 0,1.
3) 42.
4) 16.
5) 2.
6) 2.