РЕШЕНИЯ
X X I МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

8-9 КЛАСС

1. Заметим, что если вторая (центральная) шестеренка повернута на x позиций по часовой стрелке относительно начального положения, то буква в окошке меняется на букву, отстоящую от нее на x позиций, но против часовой стрелки.

При этом шестеренки с цифрами будут повернуты **против часовой стрелки** и так как $30=5\times 6$, то появившиеся в окошках цифры однозначно определяют величину x сдвига относительно начального положения, которым можно считать положение, при котором на цифровых шестеренках выставлены две единицы (см. таблицу).

цифра на 1-ом колесе / цифра на 3-ем колесе	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	6	12	18	24
2	25	1	7	13	19
3	20	26	2	8	14
4	15	21	27	3	9
5	10	16	22	28	4
6	5	11	17	23	29

Рассмотрим теперь текст:

11 55 16 53 21 16 31 15 52 14 16 44 46

Заменим пары цифр на величины поворотов:

0		4	5	14	6	5	12	10	19		15	5	3	33

Предположим что первое слово – это предлог **У.** Тогда найдём числовые величины поворота второго колеса, соответствующие всем буквам.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ж**	**З**	**И**	**К**
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
Л	**М**	**Н**	**О**	**П**	**Р**	**С**	**Т**	**У**	**Ф**
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29
Х	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**
28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Заменим величины поворотов на буквы, получим ответ.

Ответ: **У П О Д Н О Ж И Я Г О Р Ы**

6. Обозначим через $r_{257}(x)$ – остаток от деления на 257 числа x. Так как

$$r_{257}\left(a^x\right)=9=r_{257}(9)=r_{257}\left(3^2\right)=r_{257}\left(\left(r_{257}\left(a^t\right)\right)^2\right)=r_{257}\left(a^{2t}\right),$$

где $1\le t\le 256$, $r_{257}\left(a^t\right)=3$. Тогда $x=2t$ *или* $x=2t-256=2t'$. Тогда

$$r_{257}\left(a^{xy}\right)=r_{257}\left((256)^x\right)=r_{257}\left(r_{257}(-1)^x\right)=r_{257}\left((-1)^{2t}\right)=1$$

Ответ: **1**.

РЕШЕНИЯ
XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

8-9 КЛАСС

3. Если число городов m^k, а число провинций m и в каждой по m^{k-1} городов, то отнесем к каждой провинции с номером $\boldsymbol{i}$ города с названиями $(a_0, \dots, a_{k-1})$, удовлетворяющими условиям: сумма $a_0 + a_2 \dots + a_{k-1}$ кратна $\boldsymbol{i}$. Очевидно, что каждый город будет отнесен к какой-либо провинции, и любые два города в одной провинции будут отличаться не менее чем в 2-х символах.

4. Составим таблицу, в которой каждый столбец сформирован из букв, находящихся на той же клавише, что и исходная:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Г	**Р**	**О**	**З**	**У**	**С**	**Д**	**У**	**Е**	**Т**	**Н**	**Е**	**Б**	**О**	**С**	**М**	**Е**	**Н**	**А**
А	Р	М	Д	Р	Р	Д	Р	Д	Р	М	Д	А	М	Р	М	Д	М	А
Б	С	Н	Е	С	С	Е	С	Е	С	Н	Е	Б	Н	С	Н	Е	Н	Б
В	Т	О	Ж	Т	Т	Ж	Т	Ж	Т	О	Ж	В	О	Т	О	Ж	О	В
Г	У	П	З	У	У	З	У	З	У	П	З	Г	П	У	П	З	П	Г

Серым цветом выделены те тройки столбцов, которые, по всей видимости, отвечают вставленному пробелу. Так как символ пробела в тексте встречается чаще любой триграммы, то из приведенной таблицы можно сделать вывод, что знак пробела содержится именно в столбцах **РМД** (нетрудно из букв этих столбцов составить слово, например, **РОД**). При зигзагообразном чтении замечаем, что в столбцах 13,14,18,19 не прочитывается что-то осмысленное, поэтому на местах 15,16,17 пробела нет (это случайное совпадение).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Г	**Р**	**О**	**З**	**У**	**С**	**Д**	**У**	**Е**	**Т**	**Н**	**Е**	**Б**	**О**	**С**	**М**	**Е**	**Н**	**А**
А	Р	М	Д	Р	Р	Д	Р	Д	Р	М	Д	А	М	**Р**	М	**Д**	М	А
Б	С	Н	Е	**С**	С	**Е**	С	**Е**	С	Н	Е	Б	Н	С	Н	Е	Н	Б
В	Т	О	Ж	Т	Т	Ж	**Т**	Ж	Т	О	Ж	В	**О**	Т	**О**	Ж	**О**	**В**
Г	У	П	З	У	**У**	З	У	З	У	П	З	**Г**	П	У	П	З	П	Г

Ответ: **В СУЕТЕ ГОРОДОВ**

5. По условию задачи в каждом наборе искажено не более двух бит. Заметим, что наборы из табл. 1, соответствующие различным буквам, отличаются по крайней мере в трех позициях. Отсюда следует, что искажение одного или двух битов в любом наборе из табл. 1, не делает его другим набором из табл. 1 (на это потребовалось бы по крайней мере три искажения). Значит все те наборы из письма Гены, которые соответствуют наборам из табл. 1, просто не были искажены. Выпишем, соответствующие им буквы:

УД*Р*А*Т*РТ*И*Т*С*Ч*Д*У*ИХ*Д*Р****

("*****" отмечены пока не известные буквы). Итак, уже имеется некоторая основа сообщения, которая поможет нам подобрать остальные буквы. Для восстановления третьей буквы требуется посмотреть, какие наборы из табл. 1 могли при искажении одного/двух битов стать набором (0,0,1,0,0,0,0), и выбрать тот набор, которому соответствует буква, подходящая по смыслу. Так, набор (0,0,1,0,0,0,0) мог быть получен из набора (0,0,0,0,0,0,0) (при искажении третьего бита) или из набора (1,0,1,0,0,1,0) (при искажении первого и седьмого битов) или из набора (0,0,1,1,0,0,1) (при искажении четвертого и седьмого битов). Очевидно, что по смыслу подходит только набор (0,0,0,0,0,0,0), соответствующий букве **А**. Аналогичным образом восстанавливаются остальные неизвестные буквы. В результате, получаем письмо Гены.

Ответ: **УДАР МАСТЕРА СТОИТ ТЫСЯЧИ ДРУГИХ УДАРОВ**

2. Обозначим через $r_M(b)$ - остаток от деления числа b на M. Запишем чему равно число S' согласно определению деления натуральных чисел с остатком:

$$S' = r_M(S\cdot u) \qquad \Leftrightarrow \qquad Su = Mq_1 + S', 0 \le S' < M,\ \ q_1 \in \mathbb{N}_0 \qquad (1)$$

Поскольку известно, что остаток от деления $7\cdot u$ на M равен 1, то запишем:

$$7u = Mq_2 + 1, q_2 \in \mathbb{N}_0 \qquad (2)$$

Домножим обе части (1) на 7 и подставим в полученное равенство вместо $7\cdot u$ равенство (2). Имеем:

$$7Su = 7Mq_1 + 7S' \ \ \Rightarrow \ \ S(Mq_2+1) = 7Mq_1 + 7S'$$

$$7S' = M(Sq_2 - 7q_1) + S \qquad (3)$$

Заметим далее, что натуральное число $S \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 31 < 32 = M$. Поэтому полученное равенство (3) есть не что иное, как деление $7S'$ с остатком на M и, кроме того, $r_M(7S') = S$. Таким образом, найдя остаток от деления $7S'$ на M, получим исходное число S.

В нашем случае, $S = r_M(7S') = r_{32}(7\cdot 11) = r_{32}(77) = 13$. Теперь, зная S, осталось найти (x_1, x_2, x_3, x_4). Но это делается легко. Действительно, равенство $x_4 = 0$ очевидно, поскольку $S < 16$. Дальше можно перебрать все возможные восемь вариантов, либо сразу заметить, что $x_2 = x_3 = 1,\ x_1 = 0$ (что просто угадывается), либо последовательно вычитать из S числа a_3, a_2, a_1 пока не получим нуль, полагая при этом, что соответствующий $x_i = 1$.

Ответ: **(0,1,1,0).**