

ПРОГРАММА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Настоящая программа состоит из четырёх разделов.

В первом разделе приводится перечень понятий, фактов и методов, которыми должен владеть абитуриент при выполнении письменной работы по математике. Во втором разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего. В третьем разделе приведены примерные варианты заданий дополнительного вступительного испытания. Четвёртый раздел – примерный список литературы для подготовки.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала математического анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии обоснования (доказательства).

Для подготовки к дополнительному вступительному испытанию по математике целесообразно воспользоваться дополнительной литературой – сборниками задач с разобранными решениями и методическими рекомендациями. Примеры таких пособий – в разделе IV ([6], [7], [8]).

Раздел I.

Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа,

степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.
11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар, сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь

многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.

19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

Алгебра([1], [2], [3])

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n -й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и её график.
12. Свойства показательной функции и её график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.

15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия ([4], [5])

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных

из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.

12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Раздел II.

Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. Выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями.
2. Преобразовывать буквенные выражения.

3. Переводить одни единицы измерения величин в другие.
4. Сравнивать числа (без калькулятора).
5. Решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения.
6. Исследовать функции.
7. Строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами.
8. Изображать геометрические фигуры на чертеже.
9. Делать дополнительные построения.
10. Строить сечения.
11. Применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду.
12. Пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий.
13. Пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур.
14. Пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы.
15. Составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи.
16. Излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

Раздел III.

Примерные варианты заданий дополнительного вступительного испытания

ВАРИАНТ 1

1. Сравните числа $(5^{\log_{25} 8} + 7^{-\log_{49} 8})^2$ и $\sqrt{103}$. Решение обоснуйте.
2. Решите неравенство $\frac{4}{x(1-x)} + x^2 \leq x$.
3. Решите уравнение $5^{2x} - 26 \cdot 5^{x+4} + 5^{10} = 0$.
4. Решите уравнение $|\sin x| = \cos 2x$.

Найдите сумму решений, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

5. Сумма квадратов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, второй член равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите все возможные значения знаменателя прогрессии.
6. Бассейн может наполняться через две трубы. Время наполнения бассейна трубами при одновременном включении составляет 6 часов. Если бы одна первая труба подавала воду в течении трёх часов, а затем была включена и вторая, то время наполнения бассейна (с момента включения первой трубы) составило бы 8 часов. Найдите время наполнения бассейна одной первой трубой.
7. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle ABC = 90^\circ$) с основаниями AD и BC ($AD > BC$) известны длины сторон: $AB=6, BC=8, CD=7.5$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей около треугольников ABC и ACD .
8. При каких значениях параметра a уравнение $a(x-3) + 5 = \sqrt{6x - x^2}$ имеет ровно два решения?

ВАРИАНТ 2

1. Сравните числа $(\log_2^2 45 - \log_2 15 \cdot \log_2 135)$ и $\log_2^2 3$.

Решение обоснуйте.

2. Решите неравенство $|x^2 - 6x - 1| \leq |x^2 - 2x + 1|$.
3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD равна 4 . На стороне AB выбрана точка M так, что $AM:MB=3:1$. Вторая сторона прямоугольника имеет длину такую, что в четырёхугольник $AMCD$ можно вписать окружность. Найдите расстояние от центра этой окружности до вершины B .
4. Решите уравнение

$$\log_{\sin \frac{\pi x}{2}} \left(3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos(\pi x) - 1 \right) = 0.$$

Найдите сумму решений, принадлежащих отрезку $[0;100]$.

5. Две трубы подают раствор соли в резервуар (каждая со своей скоростью). Первая подаёт раствор концентрации 5% . Если трубы одновременно наполняют первоначально пустой резервуар, то концентрация раствора получается 7% . Если же половину резервуара будет наполнять одна первая труба, а оставшуюся половину вторая, то концентрация станет 9% . Найдите отношение производительностей (скоростей подачи растворов) этих двух труб.
6. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2(x+1)^2 + ax^2 = 2 - ax$$

имеет ровно два решения?

Система оценки экзаменационных работ

Работы оцениваются по 100 балльной шкале.

Решением предметной комиссии для каждого задания, в зависимости от сложности, определяется максимальное количество баллов (при полностью правильном решении) – от 10 до 20 баллов.

Каждая задача первоначально оценивается по системе: “+”, “±”, “∓”, “–”:

“+” – задание выполнено верно со всеми необходимыми обоснованиями.

“±” – задание в целом выполнено верно, допущена описка, несущественная неточность, арифметическая ошибка, не изменившая сути задания.

“∓” – при решении задания допущена грубая ошибка (например, потеря части

решения или включение посторонних решений).

“–” – к решению задания абитуриент не приступал, либо допущены грубые ошибки.

Затем, с учётом сложности задач, осуществляется перевод в баллы.

Итоговый балл за работу вычисляется суммированием баллов за все задания и выставляется на первой странице работы с руководителя (заместителя руководителя) предметной комиссии.

Раздел IV.

Литература

1. Звавич Л.И., Рязановский А.Р. Алгебра 8 класс. – М.: Мнемозина, 2008. – 276 с.
2. Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Алгебра 9 класс. – М.: Мнемозина, 2008. – 336 с.
3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Учебник для 10-11 классов средней школы в 2-х ч. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. Учебник для 7-9 классов. – М.: Просвещение, 2014. – 384 с.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). Учебник для 10-11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.
6. Сагитов Р.В., Шершнева В.Г. Сборник задач по математике для подготовительных курсов. – М.: Менеджер, 2007 г. – 160 с.
7. Сканава М.И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. – М.: Мир и Образование, 2017 г. – 608 с.
8. Рывкин А.А., Ваховский Е.Б. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. М.: Мир и Образование, 2003 г. – 544 с.